Limites supérieures

1 Définitions et premières propriétés

Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans le compact $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on désigne par $\limsup u_n$ la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$, et $\liminf u_n$ sa plus petite valeur d'adhérence.

On a les propriétés utiles suivantes:

- $\limsup u_n := \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} u_k$, $\liminf u_n := \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} u_k$.
- Si $l := \limsup u_n < +\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n < l + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
- La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$.
- $u_n \leq v_n \Rightarrow \limsup u_n \leq \limsup v_n$.
- $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$.

<u>Références de cours</u>:

- Analyse à une variable réelle, Tissier & Miallet,
- Eléments d'Analyse pour l'Agrégation, Zuily & Queffélec.

2 Exercices d'entraînement

1. Dans la mesure du possible, traduire en terme de limite supérieure ou inférieure les assertions suivantes:
   (a) La suite $(u_n)_n$ est majorée dans $\mathbb{R}$.
   (b) La suite $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
   (c) La suite $(u_n)_n$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
   (d) La suite $(u_n)_n$ est minorée par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang.
2. A-t-on en général: $\limsup(a \times u_n) = a \times \limsup u_n$?
   Rajouter une hypothèse simple sur $a \in \mathbb{R}$, pour que cela devienne vraie.
   (Remarquer que $\limsup u_n = -\liminf -u_n$).
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ si $\limsup |u_n| = 0$?
4. Montrez que : $R := \limsup |u_n|^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \{\exists \varrho \in [0, 1[, \ / \ u_n = \mathrm{O}(\varrho^n)\}$.
   Peut-on prendre $\varrho = R$ d'ans l'assertion précédente?
5. Soient P une fonction polynôme, $Z := \{x \in \mathbb{R}, \ P(x) = 0\}$, $d(u, Z) := \min\limits_{z \in Z} |u_n - z|$.
   Montrez que , en général $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ n'implique pas que $P(u_n) = \mathrm{O}(P(v_n))$.
   En revanche, montrez que si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $\liminf d(v_n, Z) > 0$ alors $P(u_n) = \mathrm{O}(P(v_n))$.
6. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$, $|f'(x)| \leq L < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit une suite $(u_n)_n$ telle que, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) + \varepsilon_n$ où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.
   Montrez que la suite $(u_n)_n$ converge.

3 $\liminf_{x \to a} f(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, on note

$$\liminf_{x \to a} f(x) := \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{|x-a|<\varepsilon} f(x)$$

1. Vérifiez que la définition précédente a bien un sens.

   Puis, montrez que si $\liminf_{x \to a} f(x) > 0$ alors f est strictement positive au voisinage de a.

2. Montrez que si f est continue en a alors $f(a) = \liminf_{x \to a} f(x)$.

3. fonctions s.c.i.: On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si:
   $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x-a| < \eta \Rightarrow f(a) - \varepsilon \leq f(x)$.

   (a) Parmis les exemples suivants, lesquels sont-ils s.c.i?

      i. $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

      ii. $\chi_{]0,1[}$, ou χ_A est la fonction qui vaut 1 sur A et 0 hors de A.

      iii. $\chi_{[0,1]}$,

      iv. $f(x) := \lim_n f_n(x)$ où $f_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout n, $f_n \leq f_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

      v. $S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

   (b) Montrez que si f est s.c.i. alors, pour tout a on a: $f(a) = \liminf_{x \to a} f(x)$.

   (c) La réciproque est-elle vraie?

   (d) En déduire qu'une fonction *s.c.i.* atteint toujours son inf sur tout compact de $\mathbb{R}$.

4 Rayon spectral

1. Suites sous-additives: on suppose que la suite réelle *positive* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout couple d'entier (n, p), $u_{n+p} \leq u_n + u_p$. Alors, montrez que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   (utiliser la division euclidienne et découper en 2)

2. Application: soit A une matrice de $M_d(\mathbb{R})$ munie d'une norme matricielle $\|.\|$ alors $\left(\|A^n\|^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Références: Pommelet, Rudin, Tissier & Miallet , Yosida, Zuily & Queffélec.