Limites supérieures

1 Pour commencer

1. Calculer $\inf u_n, \sup u_n, \liminf u_n, \limsup u_n$ avec $u_n = (-1)^n + (n)^{-1}$, $n \geq 1$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles.
   Montrer que : $\liminf u_n + \limsup v_n \leq \limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$.
   Vérifier que , si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors: $\limsup(u_n + v_n) = \lim u_n + \limsup v_n$.

2 Perturbation du point fixe du sinus: $u_{n+1} = \sin(u_n) + \varepsilon_n$.

Si $\lim \varepsilon_n = 0$, montrer que (u_n) est bornée, puis que $\limsup |u_n| = 0$ pour conclure.

3 Cauchy et D'Alembert

1. Vérifier que $\limsup(|a_n|)^{1/n} < 1$ si et seulement si il existe $\rho \in]0,1[$ tel que $a_n = O(\rho^n)$.
   Que peut-on dire si $a_n > 0$ pour tout n et si $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$?
2. Soit $a_n > 0$, montrer que : $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf(a_n)^{1/n} \leq \limsup(a_n)^{1/n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
   En déduire que si $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left((a_n)^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.

4 Suites sous-additives positives: $0 \leq u_{n+p} \leq u_n + u_p, \quad \forall(n,p)$.

Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\inf\limits_{n\geq 1} \dfrac{u_n}{n}$. (Pour q fixé, faire la division euclidienne de n par q.)

Application: Pour tout $A \in M_d(\mathbb{R})$, $\|.\|$ une norme matricielle, $\left(\|A^n\|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5 $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ i.e. $\lim\limits_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Pour $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$, avec $a < b$, vérifier une inégalité.
Puis, se placer près d'un point c où $|f|$ atteint son sup et utiliser une $\liminf$ pour conclure.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [Ru], Rudin, Principes d'Analyse Mathématiques.
- [TM], Tissier & Miallet, Analyse à une variable rélle,
- [ZQ], Zuily & Queffélec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.