Exemples de Limites supérieures et d'interversion de limites

1 Exemples de $\limsup$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles. Montrez que :

$$\liminf u_n + \limsup v_n \leq \limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n.$$

   Donnez des exemples d'inégalités strictes.

   Puis, vérifiez que , si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors: $\limsup(u_n + v_n) = \lim u_n + \limsup v_n$.

2. Cauchy et D'Alembert: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles *strictement positives*. Montrez que :

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf (a_n)^{1/n} \leq \limsup (a_n)^{1/n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

   Donnez des exemples d'inégalités strictes pour chaque inégalité.

   En déduire que si $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left((a_n)^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite, mais que la réciproque est fausse.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrez que les assertions sont suivantes sont équivalentes:

   (a) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles $\limsup f(u_n) = f(\limsup u_n)$.

   (b) f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

   (c) pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles $\liminf f(u_n) = f(\liminf u_n)$

4. On suppose que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin(u_n) + \varepsilon_n,$$

   pour tout entier n, avec $\lim \varepsilon_n = 0$. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (On pourra vérifier que $|u_n| < \pi/2$ à partir d'un certain rang, passer à la $\limsup$ et à la $\liminf$, ou, comme dans le livre de Tissier et Mialet, montrer que $\limsup |u_n| = 0$).

5. Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{C})$, avec $a < b$. Montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = \sup_{[a,b]} |f|.$$

   (On pourra d'abord démontrer une inégalité entre les deux termes. Puis, on se placera sur un petit intervalle contenant un point c où $|f|$ atteint son sup et, on utilisera une $\liminf$).

6. Suites sous-additives: on suppose que la suite réelle *positive* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ vérifie pour tout couple d'entier (n,p), $u_{n+p} \leq u_n + u_p$. Alors, montrez que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ converge.

   Application: soit A une matrice de $M_d(\mathbb{R})$ munie d'une norme matricielle $\|.\|$, montrez que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|A^n\|^{1/n}.$$

1. Démontrez le résultat trés général suivant à l'aide de suites de Cauchy:
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x \in \overline{D}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite de fonctions définies de D dans $\mathbb{R}$ telle que:

   (a) chaque fonction f_n admet une limite en x,

   (b) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D.

   Montrez alors que f admet une limite en x et que

$$\lim_{y\to x}\lim_{n\to+\infty} f_n(y) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{y\to x} f_n(y).$$

   En redéduire qu'une limite uniforme de fonction continue est continue.
   Puis, commentez l'exemple suivant $D := \mathbb{R}$, $x \in D$, $f_n(y) := \dfrac{ny}{1+n|y|}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x+n) = 0.$$

   Montrez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, signifie, d'une certaine manière, que l'on a fait une interversion de limite.
   Donnez une condition suffisante pour que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et un exemple tel que f ne converge pas en $+\infty$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telle que:

   (a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$,

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge vers un nombre noté I_n,

   (c) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers I.

   A-t-on $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = I$? Peut-on même être assuré de la convergence de l'intégrale impropre: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$?
   Rajouter une condition pour que cela devienne vraie.

4. Un calcul de $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.
   On considère la transformée de Laplace $F(t) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt)\frac{\sin(x)}{x}dx$. F est bien définie pour $t > 0$ et en $t = 0$. F est continue en 0, admet une limite nulle à l'infini, est dérivable sur $]0,+\infty[$. F' se calcule explicitement. On obtient ainsi une autre expression de F à une constante prés, et, finalement, grâce à sa limite en $+\infty$, $I = \dfrac{\pi}{2}$.
   Aprés avoir bien détaillé cette méthode de calcul de I, explicitez toutes les interversions de limites qui apparaissent de manière plus ou moins cachées pour calculer I.
   Combien d'interversions de limites apparaissent dans cet exercice? 1,2,3 ou plus?

5. Soit $(\mathcal{B}, \|.\|)$ un espace de Banach. Soit $A_{k,n} \in \mathcal{B}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que:

   (a) pour tout k, $\lim_{n\to+\infty} A_{k,n} = A_k$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_{k,n}\| < +\infty$.

   Montrez alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} A_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k$.

   Application: si A est une matrice alors on a toujours: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(Id + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k$.

Références: Pommelet, Rudin, Tissier & Miallet , Yosida, Zuily & Queffélec.