Suites et séries de fonctions

1 Montrer que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \in C^\infty(]1, +\infty[, \mathbb{R})$

2 Convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $[0, 1]$

Quelles conditions assurent l'uniforme convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sur $[0, 1]$ avec $u_n \in C^2([0, 1])$?

1. $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0, 1]$.
2. $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et $\sum u_n(0)$ converge.
3. $\sum u_n$" converge normalement sur $[0, 1]$, $\sum u_n(0)$ converge.
4. $\sum u_n$" converge normalement sur $[0, 1]$, $\sum u_n(0)$ et $\sum u_n'(1)$ convergent.
5. $\sum u_n$" converge normalement sur $[0, 1]$, $\sum u_n(0)$ et $\sum u_n(1)$ convergent.

3 Suites croissantes de fonctions continues

Soit $f_n \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que pour tout n et tout x: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \to f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que si $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ alors f_n converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Désormais on ne suppose plus f nécessairement continue.
   (a) Montrer que f peut être l'indicatrice d'un intervalle ouvert de $]0, 1[$.
   (b) Montrer que pour tout x dans $[0, 1]$: $f(x) = \liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{|x-y|<\varepsilon} f(y)$.
   (c) En déduire que f ne peut pas être l'indicatrice d'un intervalle fermé de $]0, 1[$.

4 Convergence simple et explosion des dérivées

Soit $f_n \in C^1([0, 1], \mathbb{C})$. On suppose que f_n converge simplement vers f sur $[0, 1]$.

1. Montrer que f_n peut converger uniformément sur $[0, 1]$ avec $\lim \|f_n'\|_\infty = +\infty$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme des exemples suivants sur $[0, 1]$:
   $x^n, x^n(1 - x), nx\exp(-nx), n^2x\exp(-nx^2)$;
   puis montrer que si f_n converge simplement mais non uniformément sur $[0, 1]$ alors
   $\limsup \|f_n'\|_\infty = +\infty$.

Références: Lelong-Ferrand & Arnaudiès: Analyse.
Moisans,Vernotte & Tosel: Suites et Séries de fonctions.
Rudin: Principe d'Analyse Mathématique.