Exemples de suites

1 $u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)dx$

1. Si f est décroissante et positive, montrez que (u_n) l'est aussi.
2. En déduire que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$.

2 $x^n = \exp(x),\ x > 0,\ n \geq 2$

1. Montrez que l'équation ci-dessus admet deux racines positives $u_n < v_n$.
2. Montrez que (u_n) est monotone, converge vers 1 et que $u_n = 1 + n^{-1} + \mathrm{O}(n^{-2})$.
3. Montrez que $n < v_n \sim n\ln(n)$ puis que $v_n = n[\ln(n) + \ln(\ln(n)) + \varepsilon_n]$ où $\varepsilon_n \to 0$.

3 Moyenne de Césàro de $(u_n)_{n\geq 1}$: $U_n := \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$

1. Montrez que si u_n est bornée (respectivement monotone) alors (U_n) l'est aussi.
2. Etudiez (U_n) si $u_n = 1/n,\ n,\ (-1)^n,\ (-1)^n n,\ (-1)^n\sqrt{n},\ (1/2+i\sqrt{3}/2)^n,\ \sin(n)$.
3. Montrer que si (u_n) est périodique ($\exists p > 0,\ \forall n,\ u_{n+p} = u_n$) alors (U_n) converge.
4. Montrez le théorème de Césàro: si $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $U_n \to l$.
5. Démontrez les réciproques suivantes du théorème de Césàro:
   (a) Si (u_n) est monotone et $U_n \to l$ alors $u_n \to l$.
   (b) Si $n(U_n - l) \to 0$ alors $u_n \to l$.
   (c) Si $u_n \geq 0$ et (U_n) converge vers 0, alors (u_n) converge "presque partout" vers 0. Plus précisément il existe une suite $(D_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que
      i. $D = \{n, D_n = 1\}$ est "négligeable", i.e. $\frac{D_1 + D_2 + \cdots + D_n}{n} \to 0$.
      ii. $(D_n u_n)$ converge vers 0.
6. Démontrez le lemme de l'escalier: $u_n := v_{n+1} - v_n \to h \neq 0 \Rightarrow v_n \sim nh$.
7. Donnez un équivalent de $U_n - l$ si $u_n - l = n^{-1}, (-1)^n n^{-1}, 2^{-n}, 1/n!$.
   En général, que pensez vous de la vitesse de convergence d'une moyenne de Césàro?

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [Po], Pommellet, Agrégation de Mathématiques, cours d'Analyse .
- [TM], Tissier & Miallet, Analyse à une variable rélle,