Probabilités Pour le CAPES de Mathématiques

1 Univers fini et probabilités discrètes

2 Probabilités conditionnelles

En statistiques lors d'une étude d'un caractère sur une population donnée, les résultats sont souvent obtenus ou présentées par sous-population.

Regardons le nombre d'admissible au CAPES de Mathématiques à Nice suivant leur sexe. On utilise les notations suivantes H pour homme, F pour femme, A pour admissible, R pour recalé, N le nombre d'individu de la population, N_H le nombre d'hommes, $N_{HA} = N_{AH}$ le nombre d'hommes admissibles, et ainsi de suite. On a le tableau suivant:

	H	F	
A	8	12	20
R	8	4	12
	16	16	32

Ainsi, la fréquence des admissibles à Nice est $f(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0.625$, la fréquence des hommes admissibles est $f(HA) = \frac{N_{HA}}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0.25$, la fréquence des admissibles chez les hommes est $f(A/H) = \frac{N_{HA}}{N_H} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0.5$, et $f(A/F) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$.

On remarque que les femmes réussissent mieux que les hommes, que 75% femmes sont admissibles contre 50% des hommes.

En fait, on obtient la formule générale suivant sur les fréquences conditionnelles:

$$f(A/H) = \frac{N_{AH}}{N_H} \times \frac{N}{N} = \frac{f(AH)}{f(H)}.$$

Pour faire des probabilités, on peut prendre comme univers les 32 candidats. On choisit un individu au hasard en se plaçant dans un cas d'équiprobalité. Ainsi les calculs précédents de fréquences deviennent des calculs de probabilités. Il suffit de remplacer f par P et d'interpréter les résultats obtenus en terme probabiliste. Par exemple on a 62.5% de chance de choisir un individu admissible. Sachant que cet individu est une femme on une probabilité de 0.75 d'avoir choisi une candidate admissible. Cet exemple nous introduit de manière naturelle la notion de:

Définition 1 (Probabilité conditionnelle)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P, H un sous-ensemble de Ω.

Si $P(H) \neq 0$ on note la probabilité que l'évenement A se réalise sachant que l'événement H est réalisé, ou, plus rapidement, la probabilité de A sachant H par:

$$P(A/H) := \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

Ainsi $P(./H)$ est une probabilté sur Ω:

$$\begin{array}{rccc} P(./H): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A/H) \end{array}$$

En effet, on vérifie aisément que l'additivité de $P(./H)$ par rapport à l'union disjointe résulte de celle de P et que $P(\Omega/H) = P(H)/P(H) = 1$.

On pourrait aussi voir $P(./H)$ comme une probabilité sur le sous univers H et donc ne considérer que des événements dans H. En effet pour $B \subset H$, on pourrait regarder la probabilité trace sur le sous univers H en posant $P_H(B) = cP(B)$ où c est une constante strictement positive. Ainsi l'additivité de P_H est automatiquement vérifiée. En demandant que P_H soit une loi de probabilité sur H il faut en plus que $P_H(H) = 1$ soit $c = 1/P(H)$. Ainsi, pour tout $B \subset H$ on a $P(B/H) = P_H(B)$ et plus généralement $P(A/H) = P_H(A \cap H)$.

Ceci nous donne une deuxième interprétation de la probabilité conditionnelle comme la probabilité trace sur un sous ensemble de Ω. Cependant l'usage est de parler des évenéments sur l'univers Ω et non des événements traces sur H. C'est pour cela que l'on dit que $P(./H)$ est une probabilité sur Ω et non sur le sous-univers H.

2.1 Trois enfants

Pierrot et Colombine ont trois enfants. On se demande s'ils ont une fille.

1. Quelle est la probabilité qu'ils aient au moins une fille?

2. Sachant qu'un enfant s'appelle Jean de la Lune, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille?

3. En fait, Jean de la Lune est le deuxième enfant, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille?

4. Sachant de plus que que l'aîné s'appelle Arlequin, quelle est la probabilité d'avoir au moins une fille?

2.1.1 Indications

Cet exercice montre que l'ajout d'information modifie beaucoup la probabilité cherchée. Habituellement, au fur et à mesure que l'on ajoute de l'information sur les garçons de cette famille, les gens pensent que la probabilité d'avoir une fille ne fait qu'augmenter alors que c'est exactement le contraire qui se produit. Une fois l'execrice terminé, essayez d'expliquer pourquoi le sens commun nous trompe.

1. L'univers Ω_1 est $\{F, G\}^3 = \{GGG, GGF, GFG, FGG, GFF, FGF, FFG, FFF\}$ muni de la loi uniforme, $\mathcal{F}$ est l'événement: 'avoir au moins une fille', et son contraire, avoir trois garçons. $P(\mathcal{F}) = 1 - 1/8 = \frac{7}{8}$.
2. J désigne l'événement un enfant s'appelle Jean de la Lune, donc au moins un enfant est un garçon. Cette information n'écarte que le cas d'une famille constituée de trois filles, donc $P(\mathcal{F}/J) = 1 - 1/7 = \frac{6}{7}$.
3. Pour calculer cette probabilité conditionnelle, on peut travailler directement sur le sous-univers: $\Omega_3 := \{GGG, GGF, FGG, FGF\}$. Ainsi on obtient $\frac{3}{4}$.
4. $\frac{1}{2}$

2.2 As de coeur

Pierre et Xavier ont chacun un jeu de $4 + n$ cartes dont les quatre As, $n = 28$ pour un jeu de 32 cartes, $n = 48$ pour un jeu de 52 cartes, ... Pierre et Xavier tirent 2 cartes dans leurs jeux. Pierre dit qu'il a un as. Xavier annonce qu'il a un as de coeur.

1. Qui a la plus grande chance d'avoir deux As?

2. Y-a-t-il un valeur de n pour laquelle Pierre et Xavier ont autant de chance d'avoir deux As?

2.2.1 Indications

Trois évènements interviennent: $A :=$ "$unAs$",B:="un as de coeur",C:="avoir deux as".

1. Pour Pierre on a: $P(C/A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(C)}{P(A)} = \dfrac{C_4^2/C_{n+4}^2}{1 - C_n^2/C_{n+4}^2} = \dfrac{C_4^2}{C_{n+4}^2 - C_n^2} = \dfrac{3}{2n+3}$.

   Pour Xavier on a: $P(C/B) = \dfrac{P(C \cap B)}{P(B)} = \dfrac{3/C_{n+4}^2}{(n+3)/C_{n=4}^2} = \dfrac{3}{n+3}$.

   Ainsi Xavier a plus de chance d'avoir deux as que Pierre. Alors que certains disent qu'il y a moins de mains avec deux as si l'on impose à un as d'être de coeur. Comment expliquez vous ce paradoxe?

2. On a toujours $P(C/B) > P(C/A)$ suf si $n = 0$, et dans ce cas on a égalité. Ainsi, s'il n'y a que quatre as dans chaque jeu, la couleur de l'as d'un des joueurs importe peu. C'est les autres cartes qui ne sont pas des as qui perturbent le résultat. Comment expliquez vous ce paradoxe?

   On peut généraliser avec des jeux de $p + n$ cartes dont p type d'As. On obtient le même genre de résultat: $P(C/A) = \dfrac{C_p^2}{C_{p+n}^2 - C_n^2} = \dfrac{p(p-1)}{(p+n)(p+n-1) - n(n-1)} \leq P(C/B) = \dfrac{(p-1)/C_{p+n}^2}{(p+n-1)/C_{p+n}^2} = \dfrac{(p-1)}{(p+n-1)}$.

En statistique, on partage souvent la population en sous-populations. En probabilité, on a fréquemment besoin de partitionner l'univers. On aura besoin de la définition suivante:

Définition 2 (Famille totale)
On dit que $\{C_1, \cdots, C_m\}$ est une famille totale de Ω muni de la probabilité P si:

1. *elle forme une partition de Ω: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ et, $i \neq j \Longrightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$,*

2. *pour tout i, $P(C_i) \neq 0$.*

Proposition 1 (Formule des probabilités totales)
Si $\{C_1, \cdots, C_m\}$ forme une falille totale de (Ω, P), alors, pour tout $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A/C_i)P(C_i).$$

Cette formule trés simple à démontrer mais surtout trés importante dans la pratique consititue la justification mathématique de l'utilisation des arbres dans le secondaire pour le calcul de probabilités.

La notion de probabilité conditionnelle conduit naturellement à celle d'indépendance. On dit que A est indépendant de H si le fait de savoir que H s'est réalisé ne change pas la probabilité de A de survenir, i.e. $P(A/H) = P(A)$, et donc de $P(A \cap H) = P(A/H)P(H)$ on demande que $P(A \cap H) = P(A) \times P(H)$. Cette dernière formule à l'avantage d'être symétrique. De plus, on n'a plus besoin de supposer que H soit de probabilité non nulle. On a ainsi la définition générale:

Définition 3 (Indépendance de deux événements)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. On dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

C'est ici que, pour la première fois dans ce cours, apparaît la nécéssité de normaliser les lois de probabilité à 1. Expliquez pourquoi?

Lemme 1 (Indépendance de deux événements et de leurs complémenetaires)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

<u>Exercice</u>: Démontrez le lemme. On peut remarquer qu'il suffit de démontrer la première implication dans le sens direct pour obtenir toutes les équivalences.

On vérifie que l'univers entier et l'ensemble vide sont indépendant de tout les événements de Ω.

Beaucoup de candidats au CAPES confondent independance et incompatibilité de deux événements A et B. Alors que cela n'est jamais possible (sauf si A ou B est le tout ou le rien).

Attention, l'indépendance de plus de deux événements est une notion bien plus compliquée.

2.3 Le modèle de l'urne traitée avec des arbres

On reprend l'execice des urnes en dessinant des arbres.

On dispose d'une urne de N boules numérotés de 1 à N, contenant r boules rouges et b boules blanches: $b+r=N$. Applications numériques: répondez à chaque question lorsque $N=5, r=3, b=2$.

1. Quelle est la probabilité de tirer avec remise la séquence suivante: RBR (une rouge, puis une blanche, puis une rouge)?
2. Quelle est la probabilité de tirer sans remise la séquence suivante: RBR ?

2.3.1 Indications

1. Avec remise : on a l'indépendance des tirages : $P(RBR) = \frac{r}{N}\frac{b}{N}\frac{r}{N} = \left(\frac{r}{N}\right)^2 \frac{b}{N}$, l'ordre n'a pas d'importance. Application numérique: $P(RBR) = 18/125 = 0.144$
2. Sans remise: $P(RBR) = \frac{r}{N}\frac{b}{N-1} \times \frac{r-1}{N-2}$, l'ordre n'est pas important. Application numérique: $P(RBR) = 1/5 = 0.2$

2.4 Formule de Bayes

La Formule de Bayes, appelé aussi (à tort) formule des probabilités des causes permet de passer de $P(A/B)$ à $P(B/A)$. Cette formule n'est pas au programme du secondaire, mais on la retouve naturellement dans les exercices. Ainsi, il ne faut pas apprendre cette formule mais savoir la retouver. En pratique, on représente souvent une expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré. Prenons un cas simple pour illustrer notre propos. On commence à partir de la racine de l'arbre par deux branches associées aux événements disjoints A et $\overline{A}$, puis par deux sous-branches associées aux événements disjoints B et $\overline{B}$. Ainsi, on a quatre parcours de l'arbre possibles: $\{AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{AB}\}$. La formule de Bayes revient à décrire l'expérience aléatoire en commençant par l'évènement B et en terminant par l'évènement A. Ce qui nous donne un nouvel arbre mais mathématiquement équivalent au premier avec les quatres nouveaux parcours: $\{BA, B\overline{A}, \overline{B}A, \overline{BA}\}$.

Recalculons cette fameuse formule: Si, on suppose que $P(A) \neq 0$ et $0 < P(B) < 1$ alors

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A),$$

donc

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}.$$

De la formule des probabilités totales on aussi $P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})$, ce qui nous donne la Formule de De Bayes qu'il ne faut pas apprendre mais savoir retrouver:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})}. \tag{1}$$

Voici un exercice classique est trés instructif sur l'utilisation de cette formule.

2.5 Test sanguin

Un population donnée a une proportion m d'individu atteint d'une certaine maladie. On dispose d'un test sanguin. On note M l'évènement: "être malade", +:"le test est positif.

On connaît l'efficacité de ce test sur les malades: $P(+/M) = 1-\varepsilon < 1$. On sait aussi qu'il réagit parfois positivement sur des personnes saines: $P(+/\overline{M}) = \eta > 0$.

Le traitement de cette maladie est trés lourd et parfois mortel. On n'a donc tout intérêt à savoir lorsque le test est positif combien de fois il annonce qu'une personne saine est malade.

1. Calculez $P(\overline{M}/+)$ avec $m = \varepsilon = \eta = 1\%$. Commentez le résultat surprenant que vous obtenez.
2. En général, on suppose m, ε, η "petit" ($< 1\%$). Donnez une condition entre m et η pour que ce test soit intéressant.

2.5.1 Indications

1. Notons $S := \overline{M}$. Ainsi le formule de Bayes nous donne les égalités suivantes:
$$P(S/+) = \frac{P(+/S)P(S)}{P(+/S)P(S) + P(+/M)P(M)} = \frac{1}{1 + \dfrac{P(+/M)P(M)}{P(+/S)P(S)}} = \frac{1}{1 + \dfrac{(1-\varepsilon)m}{\eta(1-m)}}. \tag{2}$$
Ainsi, pour $m = \varepsilon = \eta$, $P(S/+) = 50\%$, ce qui veut dire que l'on va traiter la moitié des personnes saines testées, ce qui est inadmissible.

2. L'étude de la formule (2) montre que pour avoir $P(S/+) << 1$ avec $P(+/M) \simeq 1$ il faut que $\frac{m}{\eta} >> 1$, c'est à dire que $\eta << m$. Cela signifie que le risque d'erreur du test sur les personnes saines doit être bien inférieur à la proportion de malade dans toute la population.

   On pourrait penser à améliorer l'efficacité du test, mais cela n'est pas aussi simple, voir irréalisable. En revanche, on peut souvent réduire la population suceptible d'avoir cette maladie en limitant cette population aux individus présentant certains symptomes, certains facteurs génétiques, ... Ainsi, on augmente beaucoup le nombre m et le test peut devenir valable dans cette sous-population.

2.6 Indépendance de n évènements

Cette notion est beaucoup plus difficile à appréhender et comporte de nombreux pièges. C'est surement pour cette raison qu'elle n'est pas au programme du secondaire. Cependant elle apparaît naturellement au lycée par le jeu de pile ou face ou plus généralement par le schéma de Bernoulli. Il faut donc en dire un mot pour nos futurs enseignants.

Définition 4 (Indépendance de n événements)
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P. On dit que n événements $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants si, pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$ et toute injection φ de $\{1, \cdots, k\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ on a:
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{\varphi(i)}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{\varphi(i)}).$$

Cela fait de l'ordre de 2^n égalités à vérifier! La confusion usuelle est de confondre l'indépendance de n évènements deux à deux et l'indépendance au sens de la définition précédente. Pour se familiariser avec cette notion, on propose deux exercices:

1. On lance une pièce parfaite deux fois et on note les deux résultats obtenus. On étudie l'indépendance des évènements suivants: A :" on a obtenu le côté pile au premier lancer ", B:" on a obtenu le côté face au deuxième lancer ", C:" on a obtenu deux fois le même résultat ".
   (a) Montrez que A et B sont des événements indépendants, B et C sont indépendants, A et C sont indépendants.
   (b) Cependant, montrez que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$. Conclure.
2. Construire un exemple simple, Ω fini dans le cas de l'équiprobabilité, où trois évènements A, B, C sont tels que: A et B ne sont pas indépendants, A et C ne sont pas indépendants, B et C ne sont pas indépendants, et pourtant $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.Conclure.

References

[1] Vous trouverez les programmes du secondaires ainsi que de nombreux documents d'accompagnement sur le site http://www.cndp.fr

[2] Livres du secondaires de Première et Terminale S et ES pour les probabilités, et de la Quatrième à la Terminale pour les statistiques

[3] Cottrell, Exercices de probabilités pour la Licence, Belin.

[4] William Feller, Introduction to probability theory and its applications, Volume I, third ed., Wiley, 1964.

[5] William Feller, Introduction to probability theory and its applications, Volume II, second ed., Wiley, 1970.

[6] Dominique Foata & Aimé Fuchs, Calcul des probabilités, Masson, 1996.

[7] Bernard Lanuzel, CAPES de Mathématiques, Probabilités et Statistiques, cours et exercices corrigés, Dunod, 1999.

[8] C. Leboeuf, J-L. Roque, J. Guéguand, Cours de probabilités et statistiques, Ellipses, 1997.

[9] R. Mazliak, Exercices de probabilités pour le CAPES.

[10] Michel Métivier, Probabilités: dix leçons d'introduction, ellipses, 1987.