Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2005-2006

Fiche n°2 : Conditionnement. Résolution de systèmes linéaires

---

Idées d'application pour les leçons d'algèbre 23, 24, 25, 31 et d'analyse 6, 10, 25 (liste des leçons de 2004).

`Remarque : Dans toute cette fiche, on n'utilisera jamais le calcul de l'inverse de la matrice A, c'est-à-dire la fonction inv de scilab.`

Exercice 1 : Comparaison des décompositions LU et de Cholesky.

1.1. [**Scilab**] Programmer une fonction qui prend en entrée une matrice A triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et un vecteur b, qui résout le système $Ax = b$ par une méthode de descente (resp. de remontée) et qui donne le vecteur solution x en sortie.

1.2. [**Scilab**] Programmer la méthode de Gauss avec pivot partiel, la décomposition LU et la décomposition de Choleski pour une matrice pleine qui satisfait les hypothèses.

1.3. [**Scilab**] *Application :* Appliquer les décompositions LU et de Choleski à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} A_{i,i} = 2, & 1 \leq i \leq n, \\ A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1, & 1 \leq i \leq n-1, \\ A_{i,j} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que remarque-t-on sur la structure des matrices trouvées ? Résoudre le système $Ax = b$ avec $n = 20$ et $b = {}^t(1, 0, \ldots, 0, 1)$

1.4. [**Scilab**] Pour plusieurs valeurs de n, évaluer et comparer par représentation graphique le temps de calcul nécessaire pour les deux décompositions (on utilisera la fonction `timer` pour calculer le temps nécessaire)

Exercice 2 : Comparaison des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation.

Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

2.1. [**Scilab**] Programmer les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de la relaxation pour $0 < \omega < 2$.

2.2. [**Scilab**] *Application :* Les appliquer à la matrice et au second membre de la question 1.3. pour $n = 20$.

2.3. [**Scilab**] Dans le cas de la matrice de la question 1.3. avec $n = 20$, trouver graphiquement le paramètre ω optimal pour la méthode de relaxation, en représentant le rayon spectral de la matrice obtenue en fonction de ω. Montrer que ce paramètre est bien égal à

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}. \tag{1}$$

Indication : On pourra utiliser les fonctions `diag` et `tril`.

2.4. **[Scilab]** Pour différentes valeurs de n ($3 \leq n \leq 20$), comparer graphiquement le nombre d'itérations nécessaires pour avoir une précision de 10^{-12} pour les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation avec le paramètre optimal donné à la question précédente.

Exercice 3 : Erreurs relatives et conditionnement

Schatzman, Analyse numérique

3.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{cond}_1(A)$.

3.2. Considérons les systèmes suivants :

$$Ax = b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A(x + \delta x) = b + \delta b = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la variation relative $||\delta x||_1/||x||_1$ de la solution et celle du second membre $||\delta b||_1/||b||_1$. Quel est le facteur d'amplification de l'erreur, c'est-à-dire $\dfrac{||\delta x||_1}{||x||_1} \times \dfrac{||b||_1}{||\delta b||_1}$?

Exercice 4 : Déterminant et conditionnement

Lascaux-Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur

4.1. Calculer en fonction de n le déterminant et le conditionnement (en norme 1 ou ∞) de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par diag $(1, 10, \cdots, 10)$.

4.2. Faire de même avec la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} B_{i,i} = 1, & 1 \leq i \leq n, \\ B_{i,i+1} = 2, & 1 \leq i \leq n-1, \\ B_{i,j} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Remarque : on peut montrer que $\mathrm{cond}_\infty(B) = \mathrm{cond}_1(B) = 3(2^n - 1)$.)

4.3. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 5 : Méthode de Gauss et choix du pivot

Lascaux-Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur

Supposons que les nombres soient représentés avec 3 chiffres significatifs, c'est-à-dire $n = \pm 0.xyz10^e$ avec $x, y, z, e \in \mathbb{N}$. Soit le système $Au = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.1. Résoudre le système par la méthode de Gauss avec comme pivot la composante 10^{-4} de la première ligne, puis avec la composante 1 de la seconde ligne.

5.2. Calculer les conditionnements cond_1, cond_∞ de la matrice exacte obtenue à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour les deux choix de pivot possibles.

Exercice 6 : Décompositions LU et de Choleski et matrices bandes

Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

Ciarlet, Miara et Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation.

`Définition : ` A `est une matrice p-bande si` $A_{i,j} = 0$ `pour` $|i-j| \geq p$.

6.1. Montrer que la décomposition LU préserve la structure des matrices-bandes. En déduire qu'il en est de même pour la décomposition de Choleski (cf question 1.3.).

6.2. Montrer le théorème suivant : Soit $A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ (0) & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$. On définit la suite $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = b_1$ et $\delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}$. Alors la décomposition LU de la matrice A est

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ a_2 \dfrac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & a_n \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & (0) \\ & \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & & \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

6.3. Combien d'opérations sont alors nécessaires pour la décomposition LU d'une matrice tridiagonale ? Comparer avec le nombre d'opérations nécessaires pour une matrice quelconque.

6.4. Même question que la question 6.3. dans le cas de la décomposition de Choleski.

Exercice 7 : Décompte d'opérations

Lascaux-Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur

Soit A inversible. Pour résoudre $A^2 x = b$, vaut-il mieux calculer A^2 puis en faire la factorisation ou de faire la décomposition LU de la matrice A, puis...

Exercice 8 : Matrice des différences finies et méthodes itératives

Schatzman, Analyse numérique

On considère la matrice déjà définie à l'exercice 1.

8.1. Calculer ses valeurs propres. En déduire les valeurs propres des matrices des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

8.2. Donner alors un développement limité en fonction de la taille n de la matrice :
– du rayon spectral de la matrice de la méthode de Jacobi ;
– du rayon spectral de la matrice de la méthode de Gauss-Seidel ;
– du rayon spectral de la matrice de la méthode de relaxation avec le paramètre optimal (1).
Déterminer alors un équivalent du nombre d'itérations nécessaires pour chacune de ces trois méthodes.

Exercice 9 : Quelques contre-exemples pour les méthodes itératives

Ciarlet, Miara et Thomas, Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation.

9.1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice définie positive. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à cette matrice ne converge pas.

9.2. Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ converge, mais que la méthode de Gauss-Seidel diverge.

9.3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ converge, mais que la méthode de Jacobi diverge.

Exercice 10 : Classement des pages web par Google

La Recherche, Octobre ou Novembre 2004

Pour classer les réponses à une requête donnée, Google utilise deux facteurs : le "score de pertinence" qui mesure l'adéquation entre la requête et le contenu de la page web et l'"indice de popularité" qui ne dépend pas de la consultation de la page par les internautes mais du nombre de liens qui pointent sur cette page à partir d'autres pages web. On s'intéresse ici au calcul de l'"indice de popularité" des pages web.

On considère qu'il y a N pages web au total ; en pratique, N est de l'ordre de 3 à 4 milliards. On calcule la probabilité $p(A)$ de consulter la page A, en sachant qu'on arrive directement à la page A dans 20% des cas et indirectement (c'est-à-dire en utilisant un lien trouvé sur une autre page web) dans 80% des cas.

On appelle "indice de popularité" de A le nombre $IP(A) = N \times p(A)$. Il vérifie donc l'équation suivante :

$$IP(A) = 0,2 + 0,8 \left(\frac{IP(B_1)}{N(B_1)} + \cdots + \frac{IP(B_{k(A)})}{N(B_{k(A)})} \right),$$

où les B_i, $1 \leq i \leq k(A)$ sont les pages qui ont un lien sortant vers A et $N(B_i)$ est le nombre de liens sortants de la page B_i.

10.1. On suppose que toutes les pages web ont au moins un lien sortant. Vérifier que la somme des indices de popularité de toutes les pages web est égale à N.

On considère le cas où la page A pointe vers la page B, la page B pointe vers A et C, la page C pointe vers B et D et la page D pointe vers C.

10.2. Écrire le système linéaire 4×4 lié au cas ci-dessus. L'étendre au cas de n pages web.

10.3. Résoudre le système obtenu. Qu'en conclure ?