On considère le sous-ensemble P de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés.

2) Pourquoi P est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$? Déduire de 1) une base (u, v) de P.

3) Montrer que $u' = (0, 0, 1, 1)$ et $v' = (6, -4, -1, 1)$ sont deux éléments de P. Montrer que (u', v') forme une famille libre. Quelles sont les coordonnées de u' et v' dans la base (u, v) ?

4 a) Question de cours Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Que signifie que F soit un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E.

4 b) Question de cours b : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u un élément de E. Qu'appelle t'on coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$? Quel est le lien entre les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs et les coordonnées de ces vecteurs ?

---

1) Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2, E_3 et E_4 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné.

Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant a les mêmes solutions que P :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_3' = E_3 - 3E_1) \end{array} \right. .$$

Les équations E_1, E_2', E_3', sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre des suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E'' :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_2') \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E_3'' = E_3' - E_2') \end{array} \right. .$$

La dernière équation est $0 = 0$, on peut la supprimer. Notre système P a donc mêmes solutions que le système :

$$(E''') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & - & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & + & 2x_4 & = & 0 & (E'_2) \end{array} \right. \quad .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2$. Ce système est triangulé.

Les variables de tête du sytème triangulé G sont : x_1, x_2. Le système E''' admet donc x_3, x_4 comme seule variable libre. Résolvons le système triangulé. La dernière équation donne :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \ .$$

Il vient :

$$x_1 = x_3 + x_4 - x_2 = -x_3 + x_4 - (2x_3 - 2x_4) = -3x_3 + 3x_4$$

L'ensemble P des solutions est donc :

$$P = \{(3x_3 + 3x_4, 2x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$P = \{x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

2) Le système E est un systéme de trois équations homogènes à coefficients rèels à quatre variables. Ses solutions P forment donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. L'algorithme de résolution en fournit une base. Ainsi, le couple (u, v), où $u = (-3, 2, 1, 0)$ et $v = (3, -2, 0, 1)$ est une base de P.

3) Nous vérifions facilement que $u' = (0, 0, 1, 1)$ et $v' = (6, -4, -1, 1)$ sont des solutions des trois équations constituant le système E. Ainsi, ces vecteurs u' et v' sont dans P. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au' + bv' = 0$, nous en déduisons :

$$a(0, 0, 1, 1) + b(6, -4, -1, 1) = (6b, -4b, a - b, a + b) = (0, 0, 0, 0)$$

Ainsi, $a - b = 6b = 0$. Donc, $a = b = 0$. Cela montre que la famille (u', v') est libre.
Comme $u' \in P$ et que (u, v) est une base de P, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $u' = xu + yv$. Nous obtenons :

$$(0, 0, 1, 1) = x(-3, 2, 1, 0) + y(3, -2, 0, 1) = (3x + 3y, 2x - 2y, x, y)$$

Il en résulte $x = 1$ et $y = 1$. Ainsi, $(1, 1)$ sont les coordonnées de u' dans la base (u, v). De même, nous obtenons que $(-1, 1)$ sont les coordonnées de v' dans la base (u, v).

4 a) Définition d'un sous-espace vectoriel : Dire que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E signifie que F est non vide, stable par addition et multiplication par un scalaire : F est non vide et pour tout $u, v \in F$ et $\lambda \in K$: $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Nous savons alors que 0 le vecteur nul de E est dans F et G. Il est ainsi dans $F \cap G$. L'intersection $F \cap G$ est donc non vide. Soit $u \in F \cap G$, $v \in F \cap G$ et $\lambda \in K$. En particulier, nous avons $u \in F$, $v \in F$ et $\lambda \in K$. Comme par hypothèse

F est un sous-espace vectoriel de E : $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$. De même, $u + v \in G$ et $\lambda u \in G$. Ainsi, nous avons bien : $u + v \in F \cap G$ et $\lambda u \in F \cap G$.

4 b) Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E, tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Le triplet (x_1, x_2, x_3) est appelé coordonnées de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ sont exactement le même combinaison linéaire des coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(\sum \lambda_i u_i) = \sum \lambda_i \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u_i) \ .$$