On considère le sous-ensemble F des solutions du système de 3 équations à 4 inconnues à coefficients réels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_2) \\ -4x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & = & 0 & (E_3). \end{array}\right.$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés.
2) Pourquoi F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$? Déduire de 1) une base (u, v) de F.
3) Montrer que $u' = (-1, 0, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 5, 2)$ sont deux éléments de F. Montrer que (u', v') forme une famille libre. Quelles sont les coordonnées de u' et v' dans votre base (u, v) ?

4a) Question de cours : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et (u, v, w) une famille de E. Que signifie que cette famille soit génératrice ? Que signifie que cette famille soit libre ? Donner deux exemples de bases du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.
4b) Question de cours : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et (u, v, w) une famille de E. Qu'appelle t'on $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille ? Si cette famille est libre, préciser une base de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$.

Solution : 1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. Le système E est ordonné, car les trois équations du système sont d'ordre 1. Triangulons notre système en utilisant l'algorithme de Gauss:

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_3' = E_3 + 4E_1) \end{array}\right. .$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Utisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la suivante :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E_3'' = E_3' - E_2') \end{array}\right. .$$

Supprimons l'équation $0 = 0$. Notre système a même solution que :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables de tête sont x_1 et x_2. Les variables libres sont x_3 etx_4.

Remontons les équations du système triangulé pour déterminer ses solutions notées S. Nous obtenons respectivement :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \ , \\ x_1 &= \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \quad . \end{aligned}$$

il en résulte :

$$S = \{(\frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{x_3(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

2) Le système E est un systéme de trois équations homogènes à coefficients rèels. Ses solutions F forment donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. L'algorithme de résolution en fournit une base. Ainsi, le couple (u, v), où

$$u = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) \quad \text{et} \quad v = (-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$$

est une base de P.

3) Nous vérifions facilement que $u' = (-1, 0, 1, 1)$ et $v' = (0, 1, 5, 2)$ sont des solutions des trois équations constituant le système E. Ainsi, ces vecteurs u' et v' sont dans F. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au' + bv' = 0$, nous en déduisons :

$$a(-1, 0, 1, 1) + b(0, 1, 5, 2) = (-a, b, -a + 5b, a + 2b) = (0, 0, 0, 0)$$

Ainsi, $-a = b = 0$. Donc, $a = b = 0$. Cela montre que la famille (u', v') est libre.
Comme $u' \in F$ et que (u, v) est une base de F, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $u' = xu + yv$. Nous obtenons :

$$(-1, 0, 1, 1) = x(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + y(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1) = (\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y, x, y)$$

Il en résulte $x = 1$ et $y = 1$. Ainsi, $(1, 1)$ sont les coordonnées de u' dans la base (u, v). De même, nous obtenons que $(5, 2)$ sont les coordonnées de v' dans la base (u, v).

4 a) Définition d'une famille génératrice : Dire que la famille (u, v, w) est génératrice de E signifie que tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs u, v, w. C'est à dire que pour tout vecteur a de E, il existe trois rèels x, y, z tels que $a = xu + yv + zw$.

Dire que la famille (u, v, w) est libre dans E signifie que la seule combinaison linéaire des vecteurs u, v, w qui est nulle est la combinaison $0u + 0v + 0w$. C'est à dire que si x, y, z sont trois rèels tels que $xu + yv + zw = 0$, alors $x = y = z = 0$.

La famille $(e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ appelée base canonique de $\mathbf{R}^3$. Le lecteur montrera que la famille $(-e_1, e_2, e_3$ en est une autre base.

4 a) Définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille : le sous-espace vectoriel engendré par la famille (u, v, w) de E est constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois vecteurs. Nous le notons $\mathrm{Vect}(u, v, w)$. Autrement écrit :

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \{\alpha u + \beta v + \gamma w \quad \text{tels que} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\} .$$

Par définition, la famille (u, v, w) engendre $\mathrm{Vect}(u, v, w)$. Donc, si la famille (u, v, w) est libre, c'est une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u, v, w)$.