Algèbre L 1, Interro 1 , durée 25' , Septembre 2015

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 – On considère le système de 4 équations à 4 inconnues à coefficients réels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & 2 & (E_2) \\ 3y_1 & & & + & 2y_3 & + & y_4 & = & -7 & (E_3) \\ 2y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & 0 & (E_4). \end{array}\right.$$

1) Préciser la première variable, la deuxième, la troisième et la quatrième variable de ce système ? Quelles sont les ordres des quatre équations ? Trianguler ce système **en suivant avec précision l'algorithme de Gauss**. Quelles sont la ou les variables libres du système triangulé obtenu ?
2) Résoudre E en paramètrant ses solutions à l'aide des variables libres obtenues ci-dessus.
3) Expliciter deux solutions de E. Donner le système homogène associé à E et ses solutions.

Correction : 1) La première variable est y_1, la deuxième y_2, la troisième y_3 et la quatrième y_4. Le système E est ordonné, car les quatre équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & & & 2y_3 & + & y_4 & = & -1 & (E_2 - E_1) \\ & & 3y_2 & - & y_3 & + & 7y_4 & = & -16 & (E_3 - 3E_1) \\ & & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & = & -6 & (E_4 - 2E_1). \end{array}\right.$$

Les équations de ce systèmpe sont d'ordre respectivement 1,3,2 et 2. Ce système n'est pas ordonné. Il a même solution que le système ordonné :

$$(E'')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & = & -6 & (E_4 - 2E_1) \\ & & 3y_2 & - & y_3 & + & 7y_4 & = & -16 & (E_3 - 3E_1) \\ & & & & 2y_3 & + & y_4 & = & -1 & (E_2 - E_1). \end{array}\right.$$

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la deuxième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E''')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & = & -6 & (E_4 - 2E_1) \\ & & & - & 4y_3 & - & 2y_4 & = & 2 & (E_3 - 3E_1) - 3(E_4 - 2E_1) \\ & & & & 2y_3 & + & y_4 & = & -1 & (E_2 - E_1). \end{array}\right.$$

Ce système est ordonné.

Étape 3 Elle consiste à utiliser la troisième équation du système E''' pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la troisième équation du système E''' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E'''')\quad \left[\begin{array}{ccccccccll} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & = & -6 & (E_4-2E_1) \\ & & & - & 4y_3 & - & 2y_4 & = & 2 & (E_3-3E_1)-3(E_4-2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E_2-E_1)+(1/2)(E_3-3E_1). \end{array}\right.$$

Qui aprés suppression de l'équation $0=0$ a même solution que le système :

$$(E''''')\quad \left[\begin{array}{ccccccccll} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 3 & (E_1) \\ & & y_2 & + & y_3 & + & 3y_4 & = & -6 & (E_4-2E_1) \\ & & & - & 4y_3 & - & 2y_4 & = & 2 & (E_3-3E_1)-3(E_4-2E_1). \end{array}\right.$$

Ce sytème est triangulé et l'algorithme est terminé.

Les variables de tête des 3 équations de E''''' sont respectivement y_1, y_2 et y_3. Ce système E''''' admet donc y_4 comme seule variable libre.

2) En remontant les équations de ce système triangulé, nous obtenons :

$$y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_4 \ .$$

Puis :

$$y_2 = -\frac{11}{2} - \frac{5}{2}y_4 \ .$$

Et :

$$y_1 = -2 \ .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(-2, -\frac{11}{2} - \frac{5}{2}y_4, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_4, y_4) \quad \text{tels que} \quad y_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(-2, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0) + y_4(0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \quad \text{tels que} \quad y_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

3) Chaque que nous fixons une valeur de y_4 nous obtenons uen solution de E. Par exemple en fixant $y_4 = 0$, puis $y_4 = 1$, nous obtenons que les quadruplets de réels :

$$(-2, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \quad \text{et} \quad (-2, -8, -1, 1)$$

sont deux solutions de E.

3) Par définition, le système dit homogène associé à E est E_h :

$$(E_h) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcl} y_1 & - & y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & = & 0 \\ y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & 0 \\ 3y_1 & & & + & 2y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ 2y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = & 0 \, . \end{array} \right.$$

Soit S_h l ensemble des solutions de E_h. Nous déduisons de la question précédente :

$$S_h = \{y_4(0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \quad \text{tels que} \quad y_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Remarque : Pour vérifier ses calculs, le lecteur vérifiera que $(2, -\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ est bien solution de E et que $(0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ est solution du système homogène associé à E_h.