Soit $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (2,-1,-1)$ et $v_3 = (4,-3,1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On note $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
1) Donner une base de G échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel G.
2) Donner un système d'équations de G.
Notons $e = (1,1,2)$. On note $D' = \mathrm{Vect}(e)$.
3) Montrer que $D' \cap G = \{0\}$. En déduire $\mathbf{R}^3 = D' \oplus G$.
4) Soit $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Expliciter la la décomposition de u comme somme d'un vecteur de G et d'un vecteur de D'.
5) Montrer que (v_1, v_3) est une base de G. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_3, e)$ est une base de$\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à $\mathcal{B}'$. Rappeler la formule de changement de coordonnées.
6) Soit $u_1, \ldots u_p$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $Vect(u_1, \ldots u_p)$ a pour base $(u_1, \ldots u_p)$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots u_p)$ est libre. Montrer que $Vect(u_1, \ldots u_p)$ a pour base $(u_1, \ldots u_p)$ si et seulement si $Vect(u_1, \ldots u_p)$ est de dimension p.

Nous noterons $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ formée des vecteurs $(1,0,0), (0,1,0)(0,0,1)$.

1) Un algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(v_1, v_2, v_3)$ (matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de v_j dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$) une base échelonnée de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ relativement à la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \quad , \quad M_{\mathcal{B}\text{can}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 1 : Posons $v_2' = v_2 - 2v_1$ et $v_3' = v_3 - 4v_1$:

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', v_3') \quad , \quad M_{\mathcal{B}\text{can}}(v_1, v_2', v_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 2 : Posons $v_3'' = v_3' - v_2'$:

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', v_3'') \quad , \quad M_{\mathcal{B}\text{can}}(u_1, u_2', u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', v_3'') = \mathrm{Vect}(v_1, v_2')$, car $v_3'' = 0$.

La famille $v_1 = (1,-1,1), u_2' = (0,1,-3)$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$) et engendre G. C'est donc une base de G échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

2) Soit $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$.

$$v \in G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2') \quad , \quad M_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(v_1, v_2', v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & -3 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

$$v \in G \Leftrightarrow v' = v - x_1 v_1 \in G \quad , \quad M_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(v_1, v_2', v') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$v \in G \Leftrightarrow v'' = v' - (x_1 + x_2) v_2' \in G \quad , \quad M_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(v_1, v_2', v'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 + 3(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

On obtient alors, $v \in G$ si et seulement si :

$$x_3 - x_1 + 3(x_1 + x_2) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \ .$$

Ainsi,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

est un système d'équations de G relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ de $\mathbf{R}^3$.

3) Soit $v \in G \cap D'$. En particulier $v \in D'$. Par définition de D', il existe un réel λ tel que $v = \lambda(1,1,2) = (\lambda, \lambda, 2\lambda)$. Comme $v \in G$, $(\lambda, \lambda, 2\lambda)$ vérifient l'équation de G relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \ .$$

Il en résulte :

$$2\lambda + 3\lambda + 2\lambda = 7\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \ .$$

Ainsi, $v = 0$. Comme le vecteur nul est dans tout sous-espace vectoriel, nous avons bien montré que $D' \cap G = \{0\}$.

Le vecteur $(1,1,2)$ est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$. Comme ce vecteur engendre D', la famille réduite au vecteur $(1,1,2)$ est une base de D'. Le sous-espace vectoriel D' de $\mathbf{R}^3$ est donc de dimension 1. Nous avons vu que la dimension du sous-espace vectoriel G est égal à 2. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3. Ainsi, les sous-espaces vectoriels G et D' de $\mathbf{R}^3$ vérifient :

$$D' \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim D' + \dim G = \dim \mathbf{R}^3 \ .$$

Or, ces deux conditions caractérisent le fait que les sous-espaces vectoriels G et D' de $\mathbf{R}^3$ sont supplémentaires ou encore $\mathbf{R}^3 = G \oplus D'$. En clair, tout vecteur de $\mathbf{R}^3$ s'écrit d'une façon unique comme somme d'un vecteur de G et d'un vecteur de D'.

4) Soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. D'aprés la question précédente, le vecteur v s'écrit de façon unique :

$$v = v' + v'' \quad \text{avec} \quad v' \in G \quad \text{et} \quad v'' \in D' \ .$$

Cherchons à déterminer v' et v'' à l'aide de (x_1, x_2, x_3). Soit λ le réel tel que $v'' = \lambda(1,1,2) = (\lambda, \lambda, 2\lambda)$. Notons $v' = (x_1', x_2', x_3')$. Puisque $v = v' + v''$: nous obtenons :

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3') + (\lambda, \lambda, 2\lambda)$$

et donc :

$$(x_1', x_2', x_3') = (x_1 - \lambda, x_2 - \lambda, x_3 - 2\lambda) \ .$$

Comme $v' \in G$, $v' = (x_1 - \lambda, x_2 - \lambda, x_3 - 2\lambda)$ vérifient l'équation $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$2(x_1 - \lambda) + 3(x_2 - \lambda) + (x_3 - 2\lambda) = 0 \,.$$

Soit $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7\lambda$. Ainsi :

$$\lambda = \frac{1}{7}(2x_1 + 3x_2 + x_3) = \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 \quad \text{et} \quad v'' = (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3)(1,1,2)\,.$$

Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3) \\ x_2 - (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3) \\ x_3 - 2(\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 \\ -\frac{2}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 \\ -\frac{4}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 \end{pmatrix} .$$

Ou encore :

$$v' = (\frac{5}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3, -\frac{2}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3, -\frac{4}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3)\,.$$

et

$$v'' = (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3, \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3, \frac{4}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3)\,.$$

5) Comme G est de dimension 2, pour montrer que les deux vecteurs v_1 et v_3 de G forment une base de G, il suffit de montrer que la famille (v_1, v_3) est libre. Soit a et b réels tels que $av_1 + bv_3 = 0$. Nous obtenons :

$$a(1,-1,1) + b(4,-3,1) = (0,0,0) \quad \text{et} \quad (a + 4b, -a - 3b, a + b) = (0,0,0)\,.$$

Ainsi, le couple (a, b) est solution du système d'équation linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & 4b & = & 0 \\ -a & - & 3b & = & 0 \\ a & + & b & = & 0\,. \end{array}\right.$$

En ajoutant les deux derniéres équations, nous obtenons $-3b = 0$, donc $b = 0$. En remplaçant b par zéro dans la première équation, nous obtenons $a = 0$. Ainsi, $(a, b) = (0, 0)$ et nous avons montré la liberté de la famille (v_1, v_2).

Comme $\mathbf{R}^3 = G \oplus D'$ une base de $\mathbf{R}^3$ s'obtient en prenant la réunion d'une base G et d'un base de D'. Or, $(1, 1, 2)$ est une base de D et nous venons de montrer que (v_1, v_3) est une base de G. Ainsi $(v_1, v_3, (1, 1, 2))$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Donnons une autre preuve. Considérons la matrice :

$$M_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(v_1, v_3, (1,1,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

dont les colonnes sont formées des corrdonnées des vecteurs $v_1, v_3, (1,1,2)$ dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$. Le déterminant de cette matrice est 7. Cette matrice est donc inversible. Cela suffit à montrer que la famille $(v_1, v_3, (1,1,2))$ formée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Cette matrice que nous noterons désormais P est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à la base $(v_1, v_3, (1,1,2))$. Son utilité provient du fait que si $u = (x_1, x_2, x_3)$ et si (X_1, X_2, X_3) sont les coordonnées de u dans la base $(v_1, v_3, (1,1,2))$, nous avons les égalités matricielles :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Il n'était pas demandé de calculer P^{-1}, je vous laisse le soin de vérifier :

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7x_1 - 7x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} .$$

Ces égalités se traduisent par :

$$(*) \quad x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (-x_1 - x_2 + x_3)v_1 + (\frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3)v_3 + (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3)(e_1 + e_2 + 2e_3) .$$

Cette égalité permet de retrouver la décomposition d'un vecteur de $\mathbf{R}^3$ comme somme d'un vecteur de G et d'un vecteuir de D'. En effet, soit $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Posons :

$$v' = (-x_1 - x_2 + x_3)v_1 + (\frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3)v_3 \quad \text{et} \quad v'' = (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3)(1,1,2) .$$

Suivant $*$ nous avons $u = u' + u''$ et d'autre part $u' \in F$ puisque $u_1 \in F$ et $u_2 \in F$ et $u'' \in D$ par définition de D.

Nous constatons alors que

$$v' = (-x_1 - x_2 + x_3)v_1 + (\frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3)v_3 = (-x_1 - x_2 + x_3)(1,-1,1) + (\frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3)(4,-3,1)$$

$$= (\frac{5}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3, -\frac{2}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3, -\frac{4}{7}x_1 - \frac{6}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3) .$$

et

$$v'' = (\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3, \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3, \frac{4}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3) .$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de la question 4.

6) Si $Vect(u_1, \dots u_p)$ a pour base $(u_1, \dots u_p)$, la famille $(u_1, \dots u_p)$ est une base et donc une famille libre. Inversement, supposons la famille $(u_1, \dots u_p)$ est libre. Comme les u_i sont dans $Vect(u_1, \dots u_p)$, la famille $(u_1, \dots u_p)$ est une famille libre de vecteurs de $Vect(u_1, \dots u_p)$. Or, par définition cette famille engendrr $Vect(u_1, \dots u_p)$. C'est donc une base de $Vect(u_1, \dots u_p)$. Si $Vect(u_1, \dots u_p)$ a pour base $(u_1, \dots u_p)$, $Vect(u_1, \dots u_p)$ a une base formée de p éléments et $\dim Vect(u_1, \dots u_p) = p$.

La famille $(u_1, \dots u_p)$ est une famille génératrice de $Vect(u_1, \dots u_p)$. Si $\dim Vect(u_1, \dots u_p) = p$, ce sera une base de $Vect(u_1, \dots u_p)$ puisque toute famille génératrice formée de p vecteurs d'un espace de dimension p en est une base.