Exercices Corrigés
Systèmes déquations linéaires

Exercice 1 – $K = \mathbf{R}$. On considère l'équation linéaire : $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$.
1) Qu'est ce qu'une solution de cette équation ?
2) Donner toutes les solutions de cette équation comme somme d'une solution particulière et des combinaisons linéaires de 3 éléments de $\mathbf{R}^4$ que l'on précisera.

Exercice 2 – $K = \mathbf{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \quad (E_2) \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \quad (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire E ?
2) Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?
3) Donner un système triangulé E'' ayant les mêmes solutions que E.
4) Préciser les variables libres de E'' ?

Exercice 3 – On considère le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lllllll} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 \quad (E_1) \\ -2x_3 & + & 2x_2 & + & x_1 & = & 0 \quad (E_2) \\ x_3 & + & x_2 & + & 2x_1 & = & 2 \quad (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire E ?
2) Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?
3) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E.
4) Quelles sont les variables libres de E' ? Quelles sont les solutions de E' ?

Exercice 4 – $K = \mathbf{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

1) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E.
2) Quelles sont les variables libres de E' ? Résoudre alors E'.

Exercice 5 – On considère le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \quad (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \quad (E_2) \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 11x_4 & = & -6 \quad (E_3) . \end{array}\right.$$

1) Donner en utilisant avec précision l'algorithme de triangulation du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres du système triangulé obtenu ?
2) Déterminer les solutions dans $\mathbf{R}^4$ de E à l'aide de ces variables libres. On exprimera ces solutions sous forme de la somme d'un élément de $\mathbf{R}^4$ et de l'ensemble des combinaisons de deux éléments de $\mathbf{R}^4$ que l'on précisera.
3) Quelles sont alors les solutions du système sans second membre associé à E ?

Exercice 6 – On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 & (E_2)\\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables de ce système. Donner en utilisant avec précision l'algorithme de triangulation du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres du système triangulé obtenu ?

2) Déterminer les solutions dans $\mathbf{R}^4$ de E à l'aide de ces variables libres. On exprimera ces solutions sous forme de la somme d'un élément de $\mathbf{R}^4$ et de l'ensemble des combinaisons d'éléments de $\mathbf{R}^4$ que l'on précisera.

3) Mêmes questions avec le système d'équations linéaires :

$$(H)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (S_1)\\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 & (S_2)\\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 & (S_3) \end{array}\right. .$$

Exercice 7 –

On considère le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1)\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 & (E_2)\\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_3)\\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 5 & (E_4). \end{array}\right.$$

1) Quel est l'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 de ce système. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?

2) Résoudre le système E. Vérifier les calculs.

Exercice 8 – $K = \mathbf{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1)\\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 0 & (E_2)\\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système E ? Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?

2) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?

Exercice 9 – On considère le système d'équations linéaires :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & & -x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1)\\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 & (E_2)\\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?

2) Résoudre ce système en exprimant ses solutions à l'aide des variables libres du système triangulé ?

Exercice 10 – On considère le système de 4 équations à 4 inconnues à coefficients rationnels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 & (E_2) \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 2 & (E_3) \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 de ce système. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?
2) Trouver les quadruplets de nombres rationnels solutions du système (E).
3) Vérifier les calculs en testant une solution particulière.
4) Résoudre le système :

$$(E_h)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E'_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E'_2) \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 0 & (E'_3) \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E'_4) \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice ?? :
1) Une solution de l'équation $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$ est un quadruplet de réels (s_1, s_2, s_3, s_4) tels que $2s_1 + s_2 - s_3 - 4s_4 = 5$.

2) Le quadruplet de réels (x_1, x_2, x_3, x_4) est une solution de notre équation si et seulement si :

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{5}{2} \quad .$$

Ainsi , l'ensemble S des solutions est :

$$\begin{aligned} S &= \{(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{5}{2}, x_2, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad , \\ &= \{(\frac{5}{2}, 0, 0, 0) + x_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + x_3(\frac{1}{2}, 0, 1, 0) + x_4(2, 0, 0, 1)) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de notre équation sont les sommes du quadruplet de réels $(\frac{5}{2}, 0, 0, 0)$ avec toutes les combinaisons linéaires des trois éléments de $\mathbf{R}^4$: $(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ et $(2, 0, 0, 1)$.

Correction de l'exercice ?? :

1) Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.

2) Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1.

3) Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (E'_2 = E_2 - E_1) \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E'_3 = E_3 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations E_1, E'_2, E'_3 sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce sytème est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (E'_2) \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & (E''_3 = E'_3 + E'_2) \end{array}\right. .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2, 3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes.

4) Les variables de tête du système triangulé précédent E'' sont x_1 pour la première équation, x_2 pour la deuxième équation et x_3 pour la troisième équation. Ainsi, x_4 est la seule variable libre de ce système triangulé.

Correction de l'exercice ?? :

1) Le système E a trois variables. La variable x_3, écrite le plus à gauche, est la première variable, puis x_2 qui est donc la deuxième variable et enfin x_1 la troisième.

2) Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_3 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1.

3) Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que le système :

$$\left[\begin{array}{cccccccl} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 & (E_1) \\ & & & & -x_1 & = & -2 & (E_2 - 2E_1) \\ & & 2x_2 & + & 3x_1 & = & 3 & (E_3 + E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations $E_1, E_2 - 2E_1, E_3 + E_1$ sont respectivement d'ordre $1, 3, 2$. Ce système n'est pas ordonné. Permutons les deux dernières équations, on obtient le système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E:

$$(E') \quad \left[\begin{array}{cccccccl} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 3x_1 & = & 3 & (E_3 + E_1) \\ & & & & -x_1 & = & -2 & (E_2 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

L'algorithme de triangulation est donc terminé en une étape.

4) Le systéme triangule E' n'a pas de variable libre. En effet les trois variables de ce systéme sont respectivement les variables de tête des équations de E'. En remontant les équations de E', on obtient que le système E a pour unique solution :

$$(s_3, s_2, s_1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2) \quad .$$

Correction de l'exercice ?? :
1) Notons E le système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \qquad (E_2) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables de ce système sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement (x_1 est la première variable, ...). Les équations E_1 et E_2 du système E sont d'ordre 1. Notre système est donc ordonné. Le système suivant a les mêmes solutions que (E) :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \qquad (E_2 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

L'équation E_1 est d'ordre 1 de variable de tête x_1, l'équation $E_2 - E_1$ est d'ordre 2 de variable de tête x_2. Ainsi, le système E' est triangulé. Ses variables libres sont x_3 et x_4.

2) Pour résoudre E', donc E, il suffit de remonter les équations de E'. La dernière équation de E' donne l'expression de x_2 à l'aide des variables libres x_3 et x_4 :

$$x_2 = x_3 + x_4 - 1$$

Remplaçons x_2 par sa valeur dans les équations précédentes, on obtient :

$$x_1 + x_3 + x_4 - 1 - x_3 - x_4 = 1 \quad ,$$

soit :

$$x_1 - 1 = 1 \quad .$$

On obtient donc l'expression de x_1 à l'aide des variables libres x_3 et x_4 : $x_1 = 2$. Ainsi, l'ensemble S des solutions est :

$$S = \{(2, x_3 + x_4 - 1, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(2, -1, 0, 0) + x_3(0, 1, 1, 0) + x_4(0, 1, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Pour vérifier, on constate bien que $(2, -1, 0, 0)$ est une solution de E et que $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ sont solutions du système sans second membre associé à E :

$$(E_0) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Correction de l'exercice ?? :

1) L'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 est l'ordre naturel. Les trois équations de E sont d'ordre 1. Le système est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & - & 9x_2 & & & - & 15x_4 & = & -18 & & (E_3' = E_3 - 4E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations E_1, E_2', E_3' sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant a les mêmes solutions que E :

$$\left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & & (E_3' - 3E_2') \end{array}\right. .$$

"Nettoyons" le système obtenu en enlevant l'équation $0 = 0$. On obtient un système ayant les mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations de ce système sont d'ordre respectivement $1, 2$. Ce système est triangulé. Le premièr algorithme est terminé.

2) Résoudre E revient donc à résoudre le système triangulé E''. La variable de tête de (E_1) est x_1, la variable de tête de (E_2') est x_2, les variables libres de E'' sont donc x_3 et x_4. Résolvons ce système triangulé en suivant la méthode du cours. La dernière équation donne :

$$x_2 = 2 - \frac{5}{3}x_4 \quad .$$

Remplaçons cette valeur de x_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \quad .$$

Nous obtenons :

$$x_1 = 1 - x_3 + \frac{2}{3}x_4 \quad .$$

Nous avons ainsi exprimé x_1 et x_2 à l'aide des variables libres. Ainsi, l'ensemble S des solutions de E est :

$$S = \{(1 - x_3 + \frac{2}{3}x_4, 2 - \frac{5}{3}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit : $S = \{(1,2,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$.

Nous avons, comme demandé, exprimé l'ensemble des solutions de E sous la forme de la somme d'une solution particulière $(1,2,0,0)$ et des combinaisons des vecteurs $(-1,0,1,0)$ et $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1)$ de $\mathbf{R}^4$.

3) Nous savons que l'ensemble :

$$\tilde{S} = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$$

est l'ensemble des solutions du système sans second membre :

$$(\tilde{E}) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 11x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On peut vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les calculs en constatant que $(1,2,0,0)$ est solution des 3 équations de E et que $(-1,0,1,0)$ et $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1)$ sont solutions des trois équations de $\tilde{E}$.

Correction de l'exercice ?? :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_3' = E_3 - E_1) \end{array} \right. .$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stope ou on ordonne. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1) \\ & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & + & 0 & = & 0 & (E_3' - E_2') \end{array} \right. .$$

On peut supprimer la dernière équation $0 = 0$. On obtient donc le système triangulé E'' qui a même solution que le système de départ :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1) \\ & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (E_2') \end{array} \right. .$$

Les variables de tête des équations de ce système triangulé sont x_1 et x_3. Les variables libres sont donc x_2 et x_4.

2) Pour résoudre un système triangulé, on part de la dernière équation et on remonte. La dernière équation donne :

$$x_3 = -1 + 2x_4 \quad .$$

La première équation donne alors :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 2 = x_2 + 1 - 2x_4 + x_4 + 2 = x_2 - x_4 + 3 \, .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(x_2 - x_4 + 3, x_2, -1 + 2x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(3, 0, -1, 0) + x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(-1, 0, 2, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

Vérification Le lecteur vérifiera que $(-1, 0, 2, 1)$ est bien solution de

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 & (E_2) \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. \quad .$$

et que $(1, 1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 2, 1)$ sont solutions du système dit homogène associé à E :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

3) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le systéme H est ordonnée car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système H pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la première équation du système H pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (S_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (S_2 - 2S_1) \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (S_3 - S_1) \end{array}\right. \quad .$$

Ordonnons, on obtient :

$$(H') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (S_1) \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (S_3 - S_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (S_2 - 2S_1) \end{array}\right. \quad .$$

Comme ce système est triangulé l'algorithme est terminé en une étape. Il admet pour seule variable libre : x_4. Résolvons H donc H'. Partons de la dernière équation et remontons :

$$x_3 = -1 + 2x_4 \quad .$$

La deuxième équation donne alors :

$$2x_2 = x_3 - 2x_4 + 1 = -1 + 2x_4 - 2x_4 + 1 = 0\ .$$

On obtient $x_2 = 0$. La première équation donne alors :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 2 = 1 - 2x_4 + x_4 + 2 = 3 - x_4$$

Soit Σ l'ensemble des solutions de S, on obtient :

$$\Sigma = \{(3 - x_4, 0, -1 + 2x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$\Sigma = \{(3, 0, -1, 0) + x_4(-1, 0, 2, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification : Le lecteur vérifiera que $(-1, 0, 2, 1)$ est bien solution de H et que $(1, 1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 2, 1)$ sont solutions du système dit homogène associé à H :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

Correction de l'exercice ?? :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_2 - E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_3 - 2E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & (E_4 - 3E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Ordonnons ce système :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & (E_4 - 3E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_2 - E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 \qquad (E_4-3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \qquad (E_3-2E_1-(E_4-3E_1)) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \qquad (E_2-E_1) \quad . \end{array}\right.$$

Ce système est ordonné.

Étape 3 Elle consiste à utiliser la troisième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la troisième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 \qquad (E_4-3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \qquad (E_3-2E_1-(E_4-3E_1)) \\ & & & & & & 0 & = & 0 \qquad . \end{array}\right.$$

Supprimons l'équation $0=0$, on obtient le système triangulé :

$$(E''') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 \qquad (E_4-3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \qquad (E_3-2E_1-(E_4-3E_1)) \quad . \end{array}\right.$$

L'algorithme est terminé.

Les variables de tête des 3 équations de E''' sont respectivement x_1, x_2 et x_3. Ce système $(*E''')$ admet donc x_4 comme seule variable libre.

2) En remontant les équations de ce système triangulé, nous obtenons :

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}x_4 \quad , \quad x_2 = \frac{4}{3} + x_4 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_4 \; .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_4, \frac{4}{3} + x_4, 1 + \frac{1}{2}x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0) + x_4(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification Le lecteur vérifiera que $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$ est bien solution de E et que $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1)$ est solution du système dit homogène associé à (E) :

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & . \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice ?? :

1) Le système $*$ a quatre variables. L'ordre des variables du système $*$ est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1.

2) Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -2 \quad (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \quad (E_3' = E_3 - 3E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations E_1, E_2', E_3' sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce sytème est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E' :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -2 \quad (E_2') \\ & & & & 8x_3 & - & 8x_4 & = & 0 \quad (E_3'' = E_3' + (1/2)E_2') \end{array}\right. .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2, 3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes.

Correction de l'exercice ?? :

Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant a les mêmes solutions que E' :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \quad (E_2' = E_2 - E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 0x_4 & = & 1 \quad (E_3' = E_3 - E_1) \end{array}\right. .$$

Les équations E_1, E_2', E_3'' sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E' :

$$(E'')\quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \quad (E'_2) \\ & & & - & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \quad (E''_3 = E'_3 - E'_2) \end{array}\right. \quad .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2, 3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes.
Les variables de têtes de ce dernier système triangulé sont x_1, x_2 et x_3. Ce système triangulé admet donc x_4 comme seule variable libre.

2) Résolvons le système triangulé. La dernière 'équation donne :

$$x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4$$

Il vient :

$$x_2 = -1 - 4x_3 + 5x_4 = -1 + \frac{4}{3} - \frac{10}{3}x_4 + 5x_4 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4$$

Il vient enfin :

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4 - x_4 = \frac{1}{3} - \frac{11}{6}x_4 \quad .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E'', on obtient :

$$S = \{(\frac{1}{3} - \frac{11}{6}x_4, \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4, -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + x_4(-\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification : on constate bien que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ est solution du système E'' et que $(-\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, 1)$ est solution du système "homogène associé :

$$(E_{hom})\quad \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

Correction de l'exercice ?? :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E')\quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \quad (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \quad (E'_3 = E_3 - 3E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \quad (E'_4 = E_4 - E_1) \end{array}\right.$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & + & 0 & = & 0 & & (E_3' - E_2') \\ & & & & & + & 0 & = & 0 & & (E_4' - E_2') \end{array}\right.$$

On peut supprimer les deux dernières équations $0 = 0$. On obtient donc le système triangulé E'' qui a même solution que le système de départ :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array}\right.$$

Les variables de tête des équations de ce système triangulé sont x_1 et x_2. Les variables libres sont donc x_3 et x_4.

2) Nous cherchons des solutions rationnelles de ce système à coefficients rationnels. Nous travaillons donc sur $K = \mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels. Pour résoudre un système triangulé, on part de la dernière équation et on remonte. La dernière équation donne :

$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \quad .$$

La première équation donne alors :

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - 2x_4 + 1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4 \quad .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0) + x_3(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0) + x_4(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

Remarque : On cherche comme quadruplets de solutions des quadruplets de rationnels. Les coefficients du système sont bien rationnels et on considère le système comme un système à coefficients rationnels. Il reste à appliquer le cours pour trouver les solutions.

3) On vérifie que $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$ est solution des quatre équations de (E).

4) Le système (E_h) est le système homogène associé à (E). D'après le cours, ses solutions sont donc

$$\{(x_3(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0) + x_4(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

Le lecteur pourra vérifier en reprenant les calculs analogues à ceux des questions 1 et 2.