Algèbre L 1, durée 1h 30, Novembre 2016

CALCULATRICES TELEPHONES ORDINATEURS TABLETTES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS
Trois Exercices

Exercice 1 – On considère le sous-ensemble P de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array} \ .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés.
= 2) Pourquoi P est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$? Donner une base $\mathcal{B} = (u, v)$ de P. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel P ?

3) Montrer que $u' = (5, 0, 1, -3)$ et $v' = (0, 5, 1, 2)$ sont deux éléments de P. Montrer que $\mathcal{B}' = (u', v')$ forme une base de P. Quelles sont les coordonnées de u' et v' dans la base (u, v) ?

4) On considère le sous-ensemble F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations : $x_1 = x_2 = 0$. Montrer que F est sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2. Donner une base $\mathcal{B}'' = (u'', v'')$ de F. Monter que (u, v, u'', v'') forme une famille libre de $\mathbf{R}^4$, une base de $\mathbf{R}^4$.

5) Déterminer $P \cap F$. Montrer que tout élément de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de F.

Exercice 2 – Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \ .$$

1) Calculer le déterminant de M. En déduire que la matrice M est inversible. Calculer la comatrice de M et l'inverse M^{-1} de M.

2) Soient trois réels a, b, c fixés, donner à l'aide de la question précédente les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & b \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & c \end{array}\right. \ .$$

3) Soient les triplets de réels : $u = (-1, 2, 2), v = (-2, 3, 3), w = (-1, 0, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de (a, b, c) dans cette base ?

Exercice 3 – Soient B, P et Δ les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \; .$$

1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} par deux méthodes.

2) Préciser une écriture de P comme produit de matrices élémentaires.

3) Montrer que

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

où a est un réel que l'on déterminera. En déduire pour tout entier n le produit matriciel :

$$B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Déterminer la suite $(u_n, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de couples de réels, définie par :

$$(u_0, v_0) = (1, 2) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcrcr} u_{n+1} & = & & & v_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n & + & 3v_n \end{array} \right. \quad .$$

5) Trouver les couples de réels (x_1, x_2) tels que :

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

6) Calculer Δ^2, Δ^3, puis Δ^n pour tout entier n.

7) Comparer $P\Delta P^{-1}$ et B.

8) En déduire B^n pour tout entier n.

Solution exercice 1

1) Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2, E_3 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné.

Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant a les mêmes solutions que P :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \quad (E_1) \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \quad (E_2' = E_2 - E_1) \\ & & 3x_2 & - & 9x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \quad (E_3' = E_3 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Les équations E_1, E_2', E_3', sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre des suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E'' :

$$\left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \quad (E_1) \\ & & 2x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \quad (E_2') \\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (E_3'' = E_3' - (2/3)E_2') \end{array}\right. .$$

La dernière équation est $0 = 0$, on peut la supprimer. Notre système E a donc mêmes solutions que le système :

$$(E''') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \quad (E_1) \\ & & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \quad ((1/2)E_2') \end{array}\right. .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2$. Ce système est triangulé.

Les variables de tête du sytème triangulé E''' sont : x_1, x_2. Le système E''' admet donc x_3, x_4 comme seule variable libre. Résolvons le système triangulé. La dernière équation donne :

$$x_2 = 3x_3 + x_4 \; .$$

Il vient :

$$x_1 = -x_3 - 2x_4 + x_2 = -x_3 - 2x_4 + (3x_3 + x_4) = 2x_3 - x_4$$

L'ensemble P des solutions est donc :

$$P = \{(2x_3 - x_4, 3x_3 + x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$P = \{x_3(2, 3, 1, 0) + x_4(-1, 1, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

2) Le système E est un systéme de trois équations homogènes à coefficients rèels et à quatre variables. Ses solutions P forment donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. L'algorithme de résolution en fournit une base. Ainsi, le couple (u, v), où $u = (2, 3, 1, 0)$ et $v = (-1, 1, 0, 1)$ est une base de P.

3) Nous vérifions facilement que $u' = (5, 0, 1, -3)$ et $v' = (0, 5, 1, 2)$ sont des solutions des trois équations constituant le système E. Ainsi, ces vecteurs u' et v' sont dans P. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au' + bv' = 0$, nous en déduisons :

$$a(5, 0, 1, -3) + b(0, 5, 1, 2) = (5a, 5b, a + b, -3a + 2b) = (0, 0, 0, 0)$$

Ainsi, $5a = 5b = 0$. Donc, $a = b = 0$. Cela montre que la famille (u', v') est libre. Or, P est un espace vectoriel de dimension 2. Une famille libre de deux vecteurs de P est donc une base de P. Nous avons ainsi montré que (u', v') est une base de P.

Comme $u' \in P$ et que (u,v) est une base de P, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $u' = xu + yv$. Nous obtenons :

$$(5,0,1,-3) = x\,(2,3,1,0) + y\,(-1,1,0,1) = (2x-y, 3x+y, x, y)$$

Il en résulte $x = 1$ et $y = -3$. Ainsi, $(1,-3)$ sont les coordonnées de u' dans la base (u,v). De même, nous obtenons que $(1,2)$ sont les coordonnées de v' dans la base (u,v).

4) F est formé des solutions d'un système homogène. Résolvons ce système.

$$F = \{(0,0,x_3,x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$F = \{x_3(0,0,1,0) + x_4(0,0,0,1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

F admet donc pour base $(u'' = (0,0,1,0), v'' = (0,0,0,1))$ et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2. La méthode est efficace ... L'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ est de dimension 4. Pour montrer que (u,v,u'',v'') forme une base de $\mathbf{R}^4$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Supposons $\alpha, \beta, \alpha'', \beta''$ des réels tels que : $\alpha u + \beta v + \alpha'' u'' + \beta'' v'' = 0$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \alpha'' = 0 \\ \beta + \beta'' = 0 \end{cases} .$$

Les deux premières équations donnent $\alpha = \beta = 0$. Nous en déduisons ensuite : $\alpha = \alpha'' = \beta = \beta'' = 0$. La famille (u,v,u'',v'') est donc libre et est une base de $\mathbf{R}^4$.

5) L'intersection de deux sous-espaces vectoriel est un est sous-espace vectoriel. Donc, $P \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. Il est formé des solutions du système d'équations homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système a même solution que le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & - & 5x_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 8x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système admet clairement $(0,0,0,0)$ comme seule solution. Ainsi, $P \cap F = \{0\}$.

Comme (u,v,u'',v'') est une base de $\mathbf{R}^4$, tout élément a de $\mathbf{R}^4$ s'écrit

$$a = \alpha u + \beta v + \alpha'' u'' + \beta'' v''$$

où $\alpha, \beta, \alpha'', \beta''$ sont des réels. Comme $\alpha u + \beta v \in P$ et $\alpha'' u'' + \beta'' v'' \in F$, nous avons écrit tout vecteur a de $\mathbf{R}^4$ comme somme d'un vecteur p de P et d'un vecteur f de F. Si un vecteur a de $\mathbf{R}^4$ admet deux telles décompositions, nous aurions :

$$a = p + f = p' + f' \quad \textit{où} \quad p \in P, p' \in P, f \in F, f' \in F \quad .$$

Nous en déduirions : $p - p' = f' - f \in P \cap F$. Comme $P \cap F = \{0\}$, il en résulte $p = p'$ et $f = f'$. Ainsi, tout tout vecteur a de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur p de P et d'un vecteur f de F.

Solution exercice 2

1) Il faut trouver $\det M = 1$. La matrice M est donc inversible. La comatrice de M est la matrice :

$$\mathrm{com}\,(M) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nous en déduisons :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, {}^t\mathrm{com}\,(M) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

2) Notre système équivaut à l'équation matricielle :

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

La matrice M étant inversible l'équation matricielle équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b + 3c \\ -2a + b - 2c \\ -b + c \end{pmatrix} .$$

Notre système admet donc comme unique solution $(3a - b + 3c, -2a + b - 2c, -b + c)$.

3) La Matrice M est justement le matrice dont les colonnes sont les coordonées des vecteurs u, v, w dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Cette matrice est inversible, donc M est une base de $\mathbf{R}^3$. Par définition, M est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base (u, v, w). Les coordonnées de (a, b, c) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ sont (a, b, c). Notons (A, B, C) les coordonnées de (a, b, c) dans la nouvelle base (u, v, w). Le triplet (A, B, C) est donné par la formule :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b + 3c \\ -2a + b - 2c \\ -b + c \end{pmatrix} .$$

En effet par définition :

$$(a,b,c) = Au + BV + Cw = A(-1,2,2) + B(-2,3,3) + c(-1,0,1) \ .$$

Nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \ .$$

Il en résulte bien :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b + 3c \\ -2a + b - 2c \\ -b + c \end{pmatrix} \ .$$

Solution exercice 3

1 et 2) Il faut trouver $\det P = 2$. Ainsi, la matrice P est inversible. Nous avons :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Pour déterminer P^{-1} utilisons l'algorithme basé sur les matrices élémentaires.

$$U_0 = P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \ , \ V_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = T_{2,1}(-1) U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_1 = T_{2,1}(-1) V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = D_1(\frac{1}{2}) U_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_2 = D_1(\frac{1}{2}) V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = T_{1,2}(-\frac{1}{2}) U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_3 = T_{1,2}(-\frac{1}{2}) V_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq 3$, nous avons : $V_i P = U_i$. En particulier $V_3 P = I_2$ et

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-\frac{1}{2}) D_1(\frac{1}{2}) T_{2,1}(-1) \ .$$

La matrice V_3 est inversible comme produit de matrices inversible. Nous obtenons :

$$P = V_3^{-1} = (T_{1,2}(-\frac{1}{2}) D_1(\frac{1}{2}) T_{2,1}(-1))^{-1} = T_{2,1}(1) D_1(2) T_{1,2}(\frac{1}{2}) \ .$$

La matrice P est en particulier inversible. Nous obtenons en particulier :

$$P^{-1} = V_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

3) Le calcul du produit matriciel donne :

$$B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ .$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier n :

$$B^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ .$$

Cette formule est vraie pour $n=1$ et pour $n=0$ suivant la convention $2^0=1$. Si elle est vraie au rang n, nous obtenons :

$$B^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=BB^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=B\,2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^nB\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^n\,2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, notre formule est bien vraie pour tout entier n.

4) La suite (u_n,v_n) est donc définie par :

$$(u_0,v_0)=(1,2)\quad\text{et}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}\ .$$

Par récurrence, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}\ .$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n\\2^{n+1}\end{pmatrix}\ .$$

Ainsi : $u_n=2^n$ et $v_n=2^{n+1}$.

5) Soit D l'ensemble des couples cherchés. Les éléments de D sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{array}{rcrcl} & & x_2 & = & x_1\\ -2x_1 & + & 3x_2 & = & x_2\ .\end{array}$$

C'est à dire du système d'équations homogènes :

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & = & 0\\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & 0\ .\end{array}$$

Ce système a même solution que le système réduit à l'équation :

$$x_1-x_2=0\quad .$$

Ces solutions sont

$$D = \{(x_2, x_2) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\} \ .$$

Ainsi, D est le sous espace-vectoriel de $\mathbf{R}^2$ de base $(1, 1)$.

6) Nous trouvons :

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

$$\Delta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \ .$$

Nous obtenons par récurrence, pour tout entier n :

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \ .$$

En effet cette formule est vraie au rang 1 et a pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang n :

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta^n \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \ ,$$

notre formule est vraie au rang $n + 1$.

7) Le calcul donne :

$$P \Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = B \ .$$

8) Nous allons montrer par récurrence que pour tout entier n :

$$B^n = P \Delta^n P^{-1} \ .$$

En effet cette formule est vraie pour $n = 1$ et $n = 0$ suivant la convention $\Delta^0 = \mathrm{Id}$. Si elle est vraie au rang n :

$$B^{n+1} = B^n B = P \Delta^n P^{-1} P \Delta P^{-1} = P \Delta^n \Delta P^{-1} = P \Delta^{n+1} P^{-1} \ .$$

Ainsi, si notre formule est alors vraie au rang n, elle l'est au rang $n + 1$.
Nous avons donc :

$$B^n = P \Delta^n P^{-1}$$

et

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2^n \\ 2 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -1 + 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} \end{pmatrix} \ .$$