Algèbre L 1, durée 1h 30, Novembre 2016

CALCULATRICES TELEPHONES ORDINATEURS TABLETTES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS
Trois Exercices

Exercice 1 – On considère le système d'équations à coefficients réels :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & (E_1)\\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & & & = & 4 & (E_2)\\ 4x_1 & & & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 12 & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés. Vous préciserez notamment les variables libres du système triangulé intermédiaire et exprimerez les solutions du système (E) à l'aide de ces variables libres.

Notons (E_h) le système homogène associé à (E) :

$$(E_h)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_{h,1})\\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & & & = & 0 & (E_{h,2})\\ 4x_1 & & & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 0 & (E_{h,3}) \end{array}\right. .$$

2) Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E_h). Résoudre (E_h) en suivant l'algorithme du cours et préciser une base du sous-espace vectoriel P. Montrer que $w = (-2, 8, 2, -2)$ est un élément de P.

Exercice 2 – Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

2) A l'aide d'un algorithme du cours montrer de nouveau que A est inversible et préciser les matrices A^{-1} et A comme produits de matrices élémentaires.

Soit

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -6 & -4 & -6 \end{pmatrix} .$$

3) Déterminer les matrices X à deux lignes et trois colonnes à coefficients réels tels que

$$AX = C .$$

4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On rappelle que $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Nous posons $u = (2, -3)$ et $v = (-1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

5) Quelles sont les coordonnées de $w = (1, 1)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$, puis dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 3 – Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \ .$$

1) Calculer le déterminant de M. En déduire que la matrice M est inversible. Calculer la comatrice de M et l'inverse M^{-1} de M.

2) En déduire les solutions du système à coefficients réels :

$$\begin{cases} 2a & + & 4b & - & c & = & \sqrt{2} \\ 2a & + & 5b & - & c & = & 0 \\ a & + & 2b & - & c & = & -\sqrt{2} \end{cases} \ .$$

3) St E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, nous considírons les vecteurs :

$$u = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \ , \ v = 4e_1 + 5e_2 + 2e_3 \ , \ w = -e_1 - e_2 - e_3 \ .$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

4) Quels sont les coordonnées de $e_1 - e_3$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 – Soit $u = (2, -3, -1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$. Nous considérons $P = \mathrm{Vec}(u, v)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ formé de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u et v.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de P.

2) Soit $w = (6, -4, -2, 2)$, montrer que $w \in P$ et donner les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$.