Algèbre L 1, durée 1h 30, Novembre 2017

CALCULATRICES TELEPHONES ORDINATEURS TABLETTES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS
Trois Exercices

Exercice 1 – On considère le système d'équations à coefficients réels :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_3) \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array} \right. .$$

On notera F l'ensemble des solutions de E.

1) Résoudre ce système E en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés. Vous préciserez notamment les variables libres du système triangulé intermédiaire et exprimerez les solutions du système E à l'aide de ces variables libres. Donner en particulier trois solutions du système.

On considère le système d'équations à coefficients réels :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & = & 0 & (E'_1) \\ -2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 0 & (E'_2) \\ -6y_1 & + & 6y_2 & - & 6y_3 & + & 2y_4 & = & 0 & (E'_3) \end{array} \right. .$$

On notera F' l'ensemble des solutions de E'.

2) Résoudre ce système E' en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés. Vous préciserez notamment les variables libres du système triangulé intermédiaire et exprimerez les solutions du système E' à l'aide de ces variables libres. Nous rappellons que F' est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et que l'algoritme de résolution donne un base de F'. Précisez cette base.

3) Monter que $u = (0, 1, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ appartient à F'. Quelles sont les cordonnées de u dans la base trouvée dans la question précédente ?

Exercice 2 – Soit

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer le déterminant de P. En déduire que P est inversible et préciser P^{-1}.

2) A l'aide d'un algorithme du cours montrer de nouveau que P est inversible et préciser une écriture des matrices P^{-1} et P comme produits de matrices élémentaires.

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

3) Calculer le produit matriciel $P^{-1}AP$.

4) Soit $u = (1,2)$ et $v = (1,1)$. Rappeler la condition qui exprime que (u, v) est une famille libre (autrement dit rappeler la définition de famille libre) ? Montrer alors que (u,v) est une famille libre de $\mathbf{R}^2$, puis une base de $\mathbf{R}^2$.

5) Calculer les produits matriciels :
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \, , \, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, , \, A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \, , \, A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout entier n .}$$

6) Préciser les matrices X de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $XP = A$?

Exercice 3 – Soit M la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) .$$

1) Calculer le déterminant de M. En déduire que la matrice M est inversible. Calculer la comatrice de M et l'inverse M^{-1} de M.

2) En déduire les solutions du système à coefficients réels :
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & & & + & 2c & = & \sqrt{3} \\ & - & b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & b & & & = & -\sqrt{3} \end{array} \right. .$$