On considère le sous-ensemble P de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système d'équations :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_2)\\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 & (E_3)\\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 & (E_4) \end{array}\right. .$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés. On précisera les variables libres du système triangulé intermédiaire.
2) Expliciter trois solutions de (E).
3) Quelles sont les solutions du système linéaire homogène associé à E.
4) Déduire de la question 1 l'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3, x_4) de E telles que $x_1 = 0$.

---

1) Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2, E_3 et E_4 de x_1 sont non nuls. Les quatre équations E_1, E_2, E_3 et E_4 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné.

Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant a les mêmes solutions que E :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & (E'_2 = E_2 - E_1)\\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & -2 & (E'_3 = E_3 - 3E_1)\\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E'_4 = E_4 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Supprimons l'équation $0 = 0$. Notre système de départ a les mêmes solutions que le système :

$$(E')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & (E'_2)\\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 4x_4 & = & -2 & (E'_3) \end{array}\right. .$$

Les équations E_1, E'_2, E'_3, sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre des suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E' :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & (E'_2)\\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E''_3 = E'_3 - 2E'_2) \end{array}\right. .$$

La dernière équation est $0 = 0$, on peut la supprimer. Notre système E a donc mêmes solutions que le système :

$$(G)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_1)\\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 & (E'_2) \end{array}\right. .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2$. Ce système est triangulé.

Les variables de tête du sytème triangulé G sont : x_1, x_2. Le système G admet donc x_3, x_4 comme seule variable libre. Résolvons le système triangulé. La dernière équation donne :

$$x_2 = -1 + 2x_3 - 2x_4 \ .$$

Il vient :

$$x_1 = 2 - x_3 + x_4 - x_2 = 2 - x_3 + x_4 - (-1 + 2x_3 - 2x_4) = 3 - 3x_3 + 3x_4$$

Désignons par P l'ensemble des solutions de E donc de G, on obtient :

$$P = \{(3 - 3x_3 + 3x_4, -1 + 2x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$P = \{(3, -1, 0, 0) + x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

2) En fixant repectivement $(x_3, x_4) = (0, 0)$, $(x_3, x_4) = (1, 0)$ et $(x_3, x_4) = (0, 1)$, nous obtenons les trois solutions : $(3, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$ et $(6, -3, 0, 1)$.

3) Ceux sont les éléments de P tels que $3 - 3x_3 + 3x_4 = 0$. Soit $x_3 = 1 + x_4$. Soit Σ l'ensemble des solutions de E telles que $x_1 = 0$, nous obtenons :

$$\Sigma = \{(0, 1, x_4 + 1, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$\Sigma = \{(0, 1, 1, 0) + x_4(0, 0, 1, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$