A) Montrer que la matrice suivante est inversible. Calculer son inverse par deux méthodes dont l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \ .$$

B) Montrer que la matrice suivante est inversible. Calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \ .$$

En déduire pour tout t réel les solutions du système :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & t \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Solution de A par méthode 1 : Le déterminant de M est $\det M = 6$. Ce nombre est non nul. La matrice M est donc inversible et la formule usuelle donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \ .$$

Solution de A par méthode 2 :

$$U_0 = M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = T_{2,1}(\frac{1}{2})U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ V_1 = T_{2,1}(\frac{1}{2})V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = D_2(\frac{1}{3})D_1(\frac{1}{2})U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_2 = D_2(\frac{1}{3})D_1(\frac{1}{2})V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$U_3 = T_{1,2}(-2)U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ V_3 = T_{1,2}(-2)V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq 3$, nous avons : $V_i M = U_i$. Il en résulte que M est inversible et :

$$M^{-1} = V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)D_2(\frac{1}{3})D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(\frac{1}{2}) \ .$$

Nous pouvons en déduire une écriture de M comme produit de matrices élémentaires :

$$M = (T_{1,2}(-2)D_2(\frac{1}{3})D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(\frac{1}{2}))^{-1} = T_{2,1}(-\frac{1}{2})D_1(2)D_2(3)T_{1,2}(2) \ .$$

Solution de B : En développant le déterminant de A par rapport à la dernière ligne, nous obtenons :

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 15 = 12 \neq 0$$

La matrice A est inversible. La comatrice de A est :

$$\mathrm{com}\,(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Reste à transposer la comatrice de A et à diviser par le déterminant de A. Nous obtenons

$$A^{-1} = \frac{1}{12}{}^t(\mathrm{com}\,(\mathrm{A})) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} .$$

Soit t est un réel. Le triplet de réel (x_1, x_2, x_3) est solution de notre système si et seulement si :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Comme A est inversible, cette égalité matricielle équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}{}^t(\mathrm{com}\,(\mathrm{A})) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6+6t \\ -6+2t \\ 18-2t \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout t réel, notre système a une unique solution :

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}t, \frac{3}{2} - \frac{1}{6}t) .$$