A) Montrer que la matrice suivante est inversible. Calculer son inverse par deux méthodes dont l'algorithme utilisant les matrices élémentaires.

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) .$$

B) Montrer que la matrice suivante est inversible. Calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) .$$

En déduire pour tout t réel les solutions du système :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & t \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Solution de A par méthode 1 : Le déterminant de M est $\det M = -12$. Ce nombre est non nul. La matrice M est donc inversible et la formule usuelle donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

Solution de A par méthode 2 :

$$U_0 = M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \ V_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = T_{2,1}(\frac{1}{3})U_0 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} , \ V_1 = T_{2,1}(\frac{1}{3})V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = D_2(\frac{1}{4})D_1(-\frac{1}{3})U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \ V_2 = D_2(\frac{1}{4})D_1(-\frac{1}{3})V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$U_3 = T_{1,2}(2)U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \ V_3 = T_{1,2}(2)V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq 3$, nous avons : $V_i M = U_i$. Il en résulte que M est inversible et :

$$M^{-1} = V_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = T_{1,2}(2)D_2(\frac{1}{4})D_1(-\frac{1}{3})T_{2,1}(\frac{1}{3}) .$$

Nous pouvons en déduire une écriture de M comme produit de matrices élémentaires :

$$M = (T_{1,2}(2)D_2(\frac{1}{4})D_1(-\frac{1}{3})T_{2,1}(\frac{1}{3}))^{-1} = T_{2,1}(-\frac{1}{3})D_1(-3)D_2(4)T_{1,2}(-2) .$$

Solution de B : En développant le déterminant de A par rapport à la dernière ligne, nous obtenons :

$$\det A = 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(-1) + 3x5 = 13 \neq 0$$

La matrice A est inversible. La comatrice de A est :

$$\mathrm{com\,(A)} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Reste à transposer la comatrice de A et à diviser par le déterminant de A. Nous obtenons

$$A^{-1} = \frac{1}{13}{}^{t}(\mathrm{com\,(A)}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit t est un réel. Le triplet de réel (x_1, x_2, x_3) est solution de notre système si et seulement si :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible, cette égalité matricielle équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}{}^{t}(\mathrm{com\,(A)}) = \frac{1}{13}{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{com\,(A)}) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6t+2 \\ -5t+20 \\ -4t+16 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout t réel, notre système a une unique solution :

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{6t+2}{13}, \frac{-5t+20}{13}, \frac{-4t+16}{13}).$$