Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$ et $u_3 = 4e_1 - 3e_2 + e_3$. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner une base de F échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F.
2) Donner un système d'équations de F relativement à $\mathcal{B}$.
On note $D = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.
3) Montrer que $D \cap F = \{0\}$. En déduire $E = D \oplus F$.
4) Soit $u \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. Expliciter la la décomposition du vecteur u comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
5) Montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de E. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$? Rappeler la formule de changement de coordonnées.
6) De façon générale, qu'appelle t'on système d'équations d'un sous-espace vectoriel H de E relativement à $\mathcal{B}$?

---

1) Un algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ (matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ relativement à à la base $\mathcal{B}$.

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 1 : Posons $u_2' = u_2 - 2u_1$ et $u_3' = u_3 - 4u_1$:

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2', u_3') \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2', u_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 2 : Posons $u_3'' = u_3' - u_2'$:

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2', u_3'') \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2', u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a $F = \text{Vect}(u_1, u_2', u_3'') = \text{Vect}(u_1, u_2')$, car $u_3'' = 0$.

La famille $u_1 = e_1 - e_2 + e_3, u_2' = e_2 - 3e_3$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre F. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

2) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$$u \in F = \text{Vect}(u_1, u_2') \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2', u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & -3 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

$$u \in F \Leftrightarrow u' = u - x_1 u_1 \in F \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2', u') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$u \in F \Leftrightarrow u'' = u' - (x_1 + x_2) u_2' \in F \quad , \quad M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2', u'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 + 3(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

On obtient alors, $u \in F$ si et seulement si :

$$x_3 - x_1 + 3(x_1 + x_2) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \; .$$

Ainsi,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) Soit $u \in F \cap D$. En particulier $u \in D$. Par définition de D, il existe un réel λ tel que $u = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) = \lambda e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont donc $(\lambda, \lambda, \lambda)$. Comme $u \in F$, les coordonnées $(\lambda, \lambda, \lambda)$ de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation de F relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \; .$$

Il en résulte :

$$2\lambda + 3\lambda + \lambda = 6\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \; .$$

Ainsi, $u = 0$. Comme le vecteur nul est dans tout sous-espace vectoriel, nous avons bien montré que $D \cap F = \{0\}$.

Le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur non nul de E. Comme ce vecteur engendre D, la famille réduite au vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ est une base de D. Le sous-espace vectoriel D de E est donc de dimension 1. Nous avons vu que la dimension du sous-espace vectoriel F est égal à 2. L'espace vectoriel E est par hypothèse de dimension 3. Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et D de E vérifient :

$$D \cap F = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim D + \dim F = \dim E \, .$$

Or, ces deux conditions caractérisent le fait que les sous-espaces vectoriels F et D de E sont supplémentaires ou encore $E = F \oplus D$. En clair, tout vecteur de E s'écrit d'une façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de D.

4) Soit $u \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. D'aprés la question précédente, le vecteur u s'écrit de façon unique :

$$u = u' + u'' \quad \text{avec} \quad u' \in F \quad \text{et} \quad u'' \in D \; .$$

Cherchons à déterminer u' et u'' à l'aide de (x_1, x_2, x_3). Soit λ le réel tel que $u'' = \lambda(e_1 + e_2 + e_3)$. Les coordonnées de u'' dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(\lambda, \lambda, \lambda)$. Notons (x_1', x_2', x_3') les coordonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$. En "passant" l'é vectorielle $u = u' + u''$ en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 - \lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} .$$

Comme $u' \in F$, les coordonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$2(x_1 - \lambda) + 3(x_2 - \lambda) + (x_3 - \lambda) = 0 .$$

Soit $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6\lambda$. Ainsi :

$$\lambda = \frac{1}{6}(2x_1 + 3x_2 + x_3) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \quad \text{et} \quad u'' = (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)(e_1 + e_2 + e_3) .$$

Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3) \\ x_2 - (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3) \\ x_3 - (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{6}x_3 \end{pmatrix} .$$

Ou encore :

$$u' = (\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3)e_1 + (-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3)e_2 + (-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{6}x_3)e_3 .$$

et

$$u'' = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_1 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_2 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_3 .$$

5) Comme F est de dimension 2, pour montrer que les deux vecteurs u_1 et u_2 de F forment une base de F, il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2) est libre. Soit a et b réels tels que $au_1 + bu_2 = 0$. En passant en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, nous obtenons :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ -a - b \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, le couple (a, b) est solution du système d'équation linéaire :

$$\left(\begin{array}{rcrcl} a & + & 2b & = & 0 \\ -a & - & b & = & 0 \\ a & - & b & = & 0 . \end{array} \right.$$

En ajoutant les deux derniéres équations, nous obtenons $-2b = 0$, donc $b = 0$. En remplaçant b par zéro dans la première équation, nous obtenons $a = 0$. Ainsi, $(a, b) = (0, 0)$ et nous avons montré la liberté de la famille (u_1, u_2).

Comme $E = F \oplus D$ une base de E s'obtient en prenant la réunion d'une base F et d'un base de D. Or, $e_1 + e_2 + e_3$ est une base de D et nous venons de montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Ainsi $(u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de E. Donnons une autre preuve. Considérons la matrice :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

dont les colonnes sont formées des corrdonnées des vecteurs $u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3$ dans la base $\mathcal{B}$. Le déterminant de cette matrice est 6. Cette matrice est donc inversible. Cela suffit à montrer que la famille $(u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3)$ formée de trois vecteurs de E est une base de E. Cette matrice que nous noterons désormais P est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $(u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3)$. Son utilité provient du fait que si (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées d'un vecteur de E dans notre première base $\mathcal{B}$ et si (X_1, X_2, X_3) les coordonnées de ce même vecteur dans la base $(u_1, u_2, e_1 + e_2 + e_3)$, nous avons les égalités matricielles :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Il n'était pas demandé de calculer P^{-1}, je vous laisse le soin de vérifier :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} .$$

Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \end{pmatrix} .$$

Ces égalités se traduisent par :

$$(*) \quad x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)u_1 + (\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)u_2 + (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3)(e_1 + e_2 + e_3) .$$

Cette égalité permet de retrouver la décomposition d'un vecteur de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteuir de D. En effet, soit $u \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$:

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 .$$

Posons :

$$u' = (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)u_1 + (\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)u_2 \quad \text{et} \quad u'' = (\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}x_3)(e_1 + e_2 + e_3) .$$

Suivant $*$ nous avons $u = u' + u''$ et d'autre part $u' \in F$ puisque $u_1 \in F$ et $u_2 \in F$ et $u'' \in D$ par définition de D.

Nous constatons alors que

$$u' = (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)u_1 + (\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)u_2 = (-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)(e_1 - e_2 + e_3) + (\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)(2e_1 - e_2 - e_3)$$

$$= (\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3)e_1 + (-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{6}x_3)e_2 + (-\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{6}x_3)e_3 \ .$$

et

$$u'' = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_1 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_2 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3)e_3 \ .$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de la question 4.

6) Un système d'équations d'un sous-espace vectoriel H d'un espace vectoriel E relativement à une de ses bases $\mathcal{B}$ est un système d'équations linéaires homogènes dont les solutions sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de H. Autrement dit, un vecteur est dans H si et seulement si ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solution du système.