Feuille 1
Corps des nombres complexes

Exercice 1 – Mettre sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les nombres complexes :

$$(2-3i)^2 \quad ; \quad (2-3i)^3 \quad ; \quad \frac{1}{2-3i} \quad ; \quad \frac{1}{(2-3i)(1+i)} \quad ; \quad \frac{2+i}{(3+i)(2-i)} \, .$$

Exercice 2 – Déterminer sous la forme $x+iy$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations :

a) $3iz + 3 - 4i = 0$

b) $(7+2i)z + 5 - 8i = 0$

c) $(1+i)\overline{z} - 5 + 4i = 0$

Exercice 3 – Déterminer les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\left[\begin{array}{ccccc} (3+2i)z_1 & + & iz_2 & = & 1+2i \\ 2z_1 & - & (1+i)z_2 & = & i-3 \end{array} \right.$$

En déduire les couples de complexes solutions du système d'équations :

$$\left[\begin{array}{ccccc} (3-2i)z_1 & - & iz_2 & = & 1-2i \\ 2z_1 & - & (1-i)z_2 & = & -i-3 \end{array} \right.$$

Exercice 4 – (Équations du second degré à coefficients réels) Trouver les nombres réels ou complexes solutions des équations suivantes :

1a) $x^2 = \dfrac{8}{81}$; 1b) $x^2 = 0$; 1c) $x^2 = -19$

2a) $(x - \dfrac{1}{3})^2 - \dfrac{3}{4} = 0$; 2b) $(\sqrt{5}x - 2)^2 = 0$; 2c) $(x - \dfrac{1}{3})^2 + \dfrac{5}{4} = 0$

3a) $14x^2 - 9x + 1 = 0$; 3b) $8x^2 + 12\sqrt{2}x + 9 = 0$; 3c) $x^2 - 2x + \dfrac{13}{9} = 0$

Exercice 5 – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les deux nombres complexes solutions de l'équation $z^2 = c$ dans les cas :

$$c = 3 + 8i \quad ; \quad c = -11 + 4i \quad ; \quad c = 1 - i \, .$$

(Une méthode consiste à remarquer que $\mid z \mid^2 = x^2 + y^2 = \mid c \mid, x^2 - y^2 = \operatorname{Re} c$, à déterminer les couples (x^2, y^2), puis les couples (x, y) en tenant compte du signe de $2xy = \operatorname{Im} c$).

Exercice 6 – (Équations du second degré à coefficients complexes) Déterminer sous la forme $x + iy$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations :

a) $z^2 + (2+i)z - i = 0$

b) $z^2 - (1+2i)z + 2 = 0$

c) $4z^2 + (2-6i)z - 8 - 6i = 0$

Déduire de a) les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 + (2-i)z + i = 0$$

.

Exercice 7 – Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$-1 \quad ; \quad 2-2i \quad ; \quad -3\sqrt{3}+3i \quad ; \quad (1-i)(\sqrt{3}+i) \quad ; \quad \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \quad .$$

En déduire par exemple le module et l'argument des complexes z tels que

$$z^5 = 2-2i \quad ; \quad z^3 = (1-i)(\sqrt{3}+i)\ .$$

Exercice 8 – (similitude directe) Déterminer le point fixe et la nature des similitudes directes :

$$\begin{array}{lll} \phi_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i \\ \phi_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i \\ \phi_3 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1 - 3i \\ \phi_4 : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi_4(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z + 2 + i \end{array}$$

Exercice 9 – (similitude directe) Considérons les similitudes directes :

$$\begin{array}{lll} \phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \phi(z) = (1+i)z + 2 + 3i \\ \psi : \mathbf{C} \to \mathbf{C} & ; & z \mapsto \psi(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})z + 1 + i \end{array}$$

1) Déterminer le point fixe et la nature de ϕ et de ψ.
2) Préciser l'application composée $\phi \circ \psi$. Constater qu'il s'agit d'une similitude directe. Déterminer son point fixe et sa nature.
3) Même question avec $\psi \circ \phi$.
4) Nous savons que ϕ et ψ sont bijectives, préciser ϕ^{-1} et ψ^{-1}.
5) Constater que ϕ^{-1} et ψ^{-1} sont des similitudes directes. Préciser avec et sans calcul leurs points fixes et leurs natures.

Exercice 10 – Donner une expression de $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ à l'aide de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Pour cela, on utilisera que pour tout entier relatif n et tout réel θ : $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$. Même question avec $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$

Exercice 11 – Soit θ un nombre réel et $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Montrer que pour tout entier n :

$$2\cos n\theta = z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad ; \quad 2i\sin n\theta = z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

En développant $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$ et $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$, donner une expression de $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$ à l'aide de $\cos 5\theta$, $\sin 5\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exercice 12 – 1) Montrer que pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \sin\theta = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2) Déduire à l'aide $\frac{\theta}{2}$ le module et l'argument du nombre complexe :

$$e^{i\theta} - 1 = \cos\theta + i\sin\theta - 1 \quad .$$

3) Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

4) Soit θ un nombre réel distinct de 0 mod 2π. Montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{in\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

5) En déduire que pour tout entier n et θ réel distinct de 0 mod 2π :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

Exercice 13 – Décrire en lien avec le paragraphe 2 du cours sur les structures algébriques le groupe $S(\{a, b, c\})$ des bijections de l'ensemble à trois éléments $\{a, b, c\}$ vers lui même.

Exercice 14 – 1) Soit z un complexe différent de $-i$. Montrer que le nombre complexe $\frac{z - i}{z + i}$ est différent de 1.

On note alors $f : \mathbf{C} - \{-i\} \to \mathbf{C} - \{1\}$ l'application définie par $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

2) Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

3) Montrer que f admet deux points fixes z_1 et z_2 que l'on déterminera.

4) Montrer qu'il existe un complexe a que l'on précisera tel que pour tout z dictinct de $-i$ et z_2 :

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = a\,\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

5) Déterminer deux complexes c et d tels que pour tout complexe z distinct de $-i$:

$$f(z) = c + \frac{d}{z + i}$$

Exercice 15 – (similitudes directes) On considère Sim^+ l'ensemble des similitudes directes. Pour a un nombre complexe non nul et b un nombre complexe, on note $\phi_{a,b}$ la similitude directe :

$$\phi_{a,b} \ : \ \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad ; \quad z \mapsto \phi_{a,b}(z) = az + b$$

1) Soit a, a' des complexes non nuls et b, b' des complexes. Préciser l'application composée $\phi_{a,b} \circ \phi_{a',b'}$.
2) Montrer que $\phi_{a,b}$ est bijective et déterminer $\phi_{a,b}^{-1}$. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}(z) = z$ est une similitude directe.
3) Montrer que Sim^+ pour la loi de composition des applications est un groupe d'élément neutre $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.
4) Déterminer en fonction de a et b les points fixes de $\phi_{a,b}$.
Soit z_0, z_1, z_2 les affixes de 3 points M_0, M_1, M_2. Notons M_0', M_1', M_2' les points dont les affixes sont $\phi_{a,b}(z_0), \phi_{a,b}(z_1), \phi_{a,b}(z_2)$.
5) Montrer que

$$\|\overrightarrow{M_0'M_1'}\| = |a| \|\overrightarrow{M_0M_1}\|$$

En déduire que si M d'affixe z décrit un cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R, les points d'affixes $\phi_{a,b}(z)$ décrivent un cercle que l'on précisera.
6) Montrer l'égalité des angles de vecteurs :

$$(\widehat{\overrightarrow{M_0'M_1'}, \overrightarrow{M_0'M_2'}}) = (\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}})$$

En déduire que si M d'affixe z décrit une droite, les points d'affixes $\phi_{a,b}(z)$ décrivent une droite.

On considére l'ensemble $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ formé des couples (a,b) tels que a est un nombre complexe non nul et b un nombre complexe. On considère la loi interne $\star$ sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ définie par :

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + b) \ .$$

7) Montrer que muni de cette loi $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ est un groupe non commutatif dont on précisera l'élément neutre.
8) Montrer que l'application :

$$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \to \mathrm{Sim}^+ \quad : \quad (a, b) \mapsto \phi_{a,b}$$

est un morphisme de groupe.
9) Montrer que ce morphisme de groupes est bijectif et déterminer son inverse.