Université de Nice Sophia-Antipolis — L1 Algébre

17-18 — semestre 1

Feuille 4
Espace vectoriel

Exercice 1 – Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et a un vecteur fixé de E.
1) Déterminer $u \in E$ en fonction de a tel que :

$$2u - \frac{1}{2}a = 3a - 7u \; .$$

2) Déterminer $u \in E$ en fonction de a tel que : tel que :

$$(i+i)u + 3a = -\frac{1}{2}a + (1-\sqrt{3})iu \; .$$

3) Déterminer de même $u, v \in E$ tels que :

$$\begin{cases} 3u - v &= \quad 4a \\ u - 2v &= \; -a \; . \end{cases}$$

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, et $x, u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{Q}$. Soit :

$$v = (\lambda - 1)(x + 5u) - 7u - (2x - u) \; .$$

1) Exprimer v comme une combinaison linéaire de x, u.
2) On suppose u non nul, déterminer en fonction de λ et u les vecteurs x tels que $v = 0$.

Exercice 3 – Démonstrations de quelques résultats généraux :
1) Montrer que si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille libre d'un espace vectoriel E, toute sous-famille de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ est une famille libre.
2) Montrer que si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E, toute famille finie de vecteurs de E contenant $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est une famille génératrice de E.
3) Soit E un K-espace vectoriel et $u_1, u_2, \ldots, u_p$ une famille libre de E. Montrer que :

$$v \notin < u_1, u_2, \ldots, u_p > \quad \Longleftrightarrow \quad (v, u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad \text{famille libre de } E \; .$$

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E Soit a de coordonnées $(1-i, 0, 2i)$, b de coordonnées $(i, 1, 0)$ et c de coordonnées $(2-i, 1, i)$ dans la base $\mathcal{B}$.
1) Calculer les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$2a - (1+i)b + 3ic \quad \text{et} \quad ((1+2i)[(2+i)(3a+ib) + (1-i)(2ia - 3b)] \; .$$

2) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs x satisfaisant la relation :

$$2a - ix = (1-i)b \; .$$

Exercice 5 – Soit $u = (1,1), v = (3,-1) \in \mathbf{R}^2$.
1) Montrer par plusieurs méthodes dont une méthode matricielle que (u,v) est une base de $\mathbf{R}^2$.
Dans les questions suivantes, on procédera également par plusieurs méthodes (résolution de systèmes, matrice de passage, ...).
2) Si (x', y') sont les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^2$ dans la base (u,v), quelles sont les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$?
3) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ dans la base (u,v) ?
4) Exprimer à l'aide de $x, y \in \mathbf{R}$, les coordonnées du vecteur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ dans la base (u,v).

Exercice 6 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Posons $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 - e_1$, $e'_3 = 2e_1$.
1) Montrer par plusieurs méthodes dont une méthode matricielle que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
Dans les questions suivantes, on procédera également par plusieurs méthodes (résolution de systèmes, matrice de passage, ...).
2) Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{B}'$?
3) Si (x', y', z') sont les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{B}'$, quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?
4) Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 7 – On considére les systèmes linéaires :

$$(1)\left\{ x - y + z + t = 0 \right. \quad ; \quad (2)\left\{ x + 2y - 2z + 4t = 0 \right. \quad ; \quad (3)\left\{ \begin{array}{lcl} x - y + z + t & = & 0 \\ x + 2y - 2z + 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

1) Pourquoi les ensembles de solutions $S_1, S_2, S_3 = S_1 \cap S_2$ de ces trois systèmes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$?
2) Donner une base de ces trois sous-espaces vectoriels (On suivra l'algorithme de résolution des systèmes linéaires).
3) Vérfier que $u = (-4, 0, 2, 2) \in S_1 \cap S_2$. Déterminer les coordonnées de u dans ces trois bases.

Exercice 8 – Soit $u = (1,1), v = (2,-1), w = (1,3) \in \mathbf{R}^2$.
On appelle relation entre u, v, w, tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$xu + yv + zw = 0\ .$$

1) Montrer que l'ensemble des relations entre u, v, w est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer une base de ce sous-espace.
3) En déduire par exemple l'expréssion de w comme combinaison linéaire de (u,v).

Exercice 9 – Soit $F = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a + d = 0\}$.
1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2) Déterminer une base de F.

3) Même question avec les matrices triangulaires supérieures $M_2(K)$.
4) Même question avec les matrices diagonales de $M_n(K)$ de traces nulles, puis les matrices de $M_n(K)$ de traces nulles.

Exercice 10 – Soit $G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \quad ; \quad a + d = 0 \text{ et } b + c = 0\}$.
1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2) Montrer que $\mathcal{B} = (A_1, A_2)$ est une base de G où :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Montrer que les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base $\mathcal{B}'$ de G.
4) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1}. En déduire les coordonnées des matrices A_1 et A_2 dans la base $\mathcal{B}'$.