Feuille 5
Algorithmes, dimension, somme et intersection

Exercices sur algorithmes et dimension

Exercice 1 – Soit $u = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$.
1) Montrer que $D = \mathrm{Vect}(u)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ engendré par u. Montrer que D est une droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ (c.a.d. un sous-espace vectoriel de dimension 1) de base (u).
2) Donner une équation de cette droite D relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
3) Soit $v = (-17, -34)$, montrer que $v \in D$. Quelles sont les coordonnées de v dans la base (u) ?
4) Soit $w = (15, 29)$, montrer que $w \notin D$. Puis, que (u, w) est une base de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$.
1) Montrer que $D = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle de E de base (u).
2) Donner un système d'équations de cette droite D relativement à $\mathcal{B}$.
3) Soit $v = -17e_1 - 34e_2 - 51e_3$, montrer que $v \in D$. Quelles sont les coordonnées de v dans la base (u) ?
4) Soit w de coodonnées $(14, 28, 66)$ dans la base $\mathcal{B}$, montrer que $w \notin D$.

Exercice 3 – Soit $u = (1, 2, 3, 4) \in \mathbf{R}^4$.
1) Montrer que $D = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle de $\mathbf{R}^4$ de base (u).
2) Donner un système d'équations de cette droite D relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit $v = (-17, -34, -51, -68)$, montrer que $v \in D$. Quelles sont les coordonnées de v dans la base (u) ?
4) Soit $w = (13, 26, 39, 51)$, montrer que $w \notin D$.

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u de coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ et v de coordonnées $(-2, 1, 1)$.
1) Montrer que $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est un plan vectoriel de E de base (u, v).
2) Donner une base échelonnée de P relativement à la base $\mathcal{B}$ de P.
2) Donner un système d'équations de ce plan P relativement à la base $\mathcal{B}$.
3) Soit $w = -e_1 + 8e_2 + 11e_3$, montrer que $w \in P$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base (u, v) ?
4) Montrer que $w' = -e_1 + 8e_2 + 10e_3 \notin P$. Puis, que (u, v, w') est une base de E.

Exercice 5 – Soit $u = (1, 2, -1, 1), v = (2, 1, 0, 1) \in \mathbf{R}^4$.
1) Donner une base échelonnée relativement à la base canonique $\mathbf{R}^4$ de $P = \mathrm{Vect}(u, v)$. Quel est le rang de la famille (u, v) ?
2) En déduire que P est une plan vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de base (u, v).
3) Donner un système d'équations de ce plan P relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
4) Montrer que $w = (7, 8, -3, 5) \in P$. Quelles sont les coordonnées de w dans la base (u, v) ?

Exercice 6 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v = e_1 + e_2 + 2e_3$ et $w = 4e_1 + 3e_3$.
1) Donner chacune des étapes de l'algorithme du cours qui permet de donner une base échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\text{Vect}(u, v, w)$. On note $\mathcal{B}'$ cette base.
2) En déduire le rang de la famille (u, v, w), que $E = \text{Vect}(u, v, w)$ et que (u, v, w) est une base notée $\mathcal{B}''$ de E.
3)Donner les 6 matrices de passage entre ces trois bases de E.

Exercice 7 – Soit $u_1 = (1, 1, 1, 4), u_2 = (1, 1, 3, 2), u_3 = (2, 3, 1, 1), u_4 = (1, 1, 3, 8) \in \mathbf{R}^4$.
1) Donner chacune des étapes de l'algorithme du cours qui permet de donner une base échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$ de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. On note $\mathcal{B}'$ cette base.
2) En déduire le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4). En déduire que $\mathbf{R}^4 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ et que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base notée $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$.
3) En suivant l'algorithme, exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ à l'aide de ceux de $\mathcal{B}$. Puis, inversement exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ à l'aide de ceux de $\mathcal{B}'$. Donner les 6 matrices de passage entre la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 8 – On considère les trois vecteurs $a = (1, 1, \beta), b = (1, \beta, 1), c = (\beta, 1, 1)$ de $\mathbf{R}^3$. Déterminer suivant β la dimension de $\text{Vect}(a, b, c)$ et une base de $\text{Vect}(a, b, c)$.

Exercice 9 – Soit $u = (1, 2, 3), v = (-2, 1, 1), w = (-4, 7, 9) \in \mathbf{R}^3$.
1) Donner une base échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de $\text{Vect}(u, v, w)$.
2) En déduire que $\text{Vect}(u, v, w)$ est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ noté P.
3) Donner une équation de ce plan vectoriel P.
4) Montrer que (u, v) est une base de P. Quelles sont les coordonnées de w dans cette base ?

Exercice 10 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u_1, u_2, u_3, u_4 quatre vecteurs de E respectivement de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:

$$(1, 2, -1, 1), (2, 1, 0, 1), (1, 2, 2, 1), (4, -1, 2, 1) \quad .$$

1) Donner une base échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ? En déduire que $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est un hyperplan vectoriel noté H de E.
2) Donner une équation de cet hyperplan vectoriel H relativement à la base $\mathcal{B}$.
3) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de H. Quelles sont les coordonnées de u_4 dans cette base ?

Exercices sur les sommes et les intersections de sous-espaces vectoriels

Exercice 11 – Considérons les sous-espaces vectoriels $D = \text{Vect}((1, 1))$ et $D' = \text{Vect}((1, 4))$ de $\mathbf{R}^2$.
1) Donner des équations définissant les sous-espaces vectoriels D et D'.
2) Montrer que D et D' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^2$.
3) Expliciter la décomposition du vecteur $(1, 0)$ comme somme d'un vecteur de D et d'un

vecteur de D'. Faire un dessin.
4) Plus généralement, soit $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Expliciter la décomposition de u comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de D'.

Exercice 12 – Considérons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + 3z = 0$ et les sous-espaces vectoriels $D = \mathrm{Vect}((1, 1, 2))$ et $D' = \mathrm{Vect}((1, 1, 3))$ de $\mathbf{R}^3$.
1) Montrer que P et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
2) Donner des équations définissant les sous-espaces vectoriels D et D' et une base de P.
3) Expliciter la décomposition du vecteur $(1, 0, 0)$ comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de P.
4) Plus généralement, soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Expliciter la décomposition de u comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D.
4) Préciser $D \cap D'$. Déterminer une base et des équations $D + D'$, puis de $P \cap (D + D')$.

Exercice 13 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons P le sous-espace vectoriel de E d'équation $x - y + z = 0$ relativement à la base $\mathcal{B}$, $u = 5e_1 + 4e_2 + e_1$ et $v = e_1 + e_2 + e_3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
1) Le sous-espace vectoriel F est-il un plan, une droite de E ? Même question pour P.
2) Déterminer $F \cap P$.

Exercice 14 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère H le sous-espace vectoriel de E d'équation $x + y + 2z + 2t = 0$ relativent à la base $\mathcal{B}$ et D le sous-espace vectoriel des multiples du vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
1) Expliciter une base de H.
2) Montrer que H et D sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
3) Expliciter la décomposition du vecteur e_1 comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de H.
4) Plus généralement, soit (x, y, z, t) les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$. Écrire explicitement ce vecteur comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de D.
5) Soit (a, b, c, d) les coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que H et $\mathrm{Vect}(u)$ soient supplémentaires.

Exercice 15 – On considére P_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ d'équations :

$$P_1 \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + t & = & 0 \\ x + 2y - 2z + 4t & = & 0 \end{array} \right. .$$

et le sous espace $P_2 =< (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1) >$.
1) Expliciter une base de P_1 et P_2.
2) Montrer que P_1 et P_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
3) Donner un système d'équations de P_2.
4) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Écrire explicitement ce vecteur comme somme d'un vecteur de P_1 et d'un vecteur de P_2.
5) On considère P_2' le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ d'équations :

$$P_2' \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 2z + 4t & = & 0 \\ x + 3y - z + 5t & = & 0 \end{array} \right.$$

6) Déterminer une base de $P_1 \cap P_2'$ et de $P_1 + P_2'$. Donner $P_1 + P_2'$ par un système d'équations.

Exercice 16 – (Algorithmes) Soit E un K-espace vectoriel muni d'un base $\mathcal{B}$.
Soit $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E.
1) Montrer :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n) \;=\; \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_m) \;+\; \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)\ .$$

On suppose donnés F et G deux sous-espaces vectoriels de E par des systèmes de générateurs dont les coordonnées sont connues dans la base $\mathcal{B}$.
2) Donner à l'aide d'un algorithme du cours un algorithme donnant une base de la $F + G$.
3) Donner à l'aide d'un algorithme du cours un algorithme pour décider si F et G sont supplémentaires. Dans ce cas, donner un algorithme pour décomposer un vecteur de E donné par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
4) Donner à l'aide d'algorithmes du cours un algorithme donnant une base $F \cap G$.

Exercices sur d'autres exemples

Exercice 17 – Soit S le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites de nombres réels. Soit :

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad ; \quad \forall n \geq 2 \ \ : \ \ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\} \subset S$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de S.
2) Montrer qu'il existe deux réels distincts que l'on déterminera λ_1, λ_2 tels que les suites :

$$s_1 = (\lambda_1^n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad s_2 = (\lambda_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$$

appartiennent à F.
3) Montrer que (s_1, s_2) est une base de F.
4) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de F définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Déterminer les coordonnées de u dans la base (s_1, s_2). En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 18 – Soit $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. L'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0$ est appelée fonction polynomiale de degré $\leq n$. Notons E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.
1) Montrer que $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2) Si $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f. Montrer que

$$F_n = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad ; \quad f^{(n+1)} = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
3) En utilisant le fait qu'une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, montrer par récurrence sur n que $E_n = F_n$.

4) En calculant ses dérivées successives, montrer que si f est une fonction polynomiale de degré $\leq n$, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ uniques appelés coefiicients de f tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0$$

5) En déduire une base de E_n.

6) Hors concours : Le nombre π étant la surface d'un cercle de rayon 1. Ferdinand Lindemmann a montré en 1882 qu'il n'existe pas de fonction polynomiale non identiquement nulle et à coefficients rationels qui s'annule en π. On dit que le nombre π est transcendant. En déduire que pour tout entier n, la famille $(1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^n)$ est une famille libre de l'ensemble des nombres réels considéré naturellement comme espace vectoriel sur le corps des rationels. En déduire que le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ n'admet pas de famille génératrice fini.
Pour l'histoire, l'existence de nombres transcendants résulte du fait qu'il n'existe pas de bijection entre l'ensemble des nombres réels et celui des entiers naturels (Georg Kantor, 1874) et on doit a Joseph Liouville d'avoir exhibé en 1844 les premiers nombres transcendants.

Exercice 19 – Notons par $\mathcal{F}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
1) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) de $\mathcal{F}$ formé des fonctions paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
2) Soit $\tau : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto \tau(x) = -x$. Montrer que f est paire si et seulement si $f \circ \tau = f$ et que f est impaire si et seulement si $f \circ \tau = -f$. Constater que pour tout $f, g \in \mathcal{F}$:

$$(f+g) \circ \tau = f \circ \tau + g \circ \tau \quad \text{et} \quad (-f) \circ \tau = -(f \circ \tau)$$

3) Soit $f \in \mathcal{F}$, $a \in \mathcal{P}$ et $b \in \mathcal{I}$ tels que $f = a + b$. Déterminer a et b à l'aide de f et $f \circ \tau$.
4) Monter que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
5) Ecrire les applications suivantes comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire :

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f_1(x) = \sin(x^3) \quad , \quad f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto f_2(x) = e^x \ .$$