Feuille 6
Application linéaire

Exercices sur les opérations entre applications linéaires

Exercice 1 – On considère l'application :

$$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \ : \ (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1) \ .$$

1) Vérifier que cette application est linéaire.
2) Expliciter l'application linéaire g^2. Puis, montrer que $g^2 - g - 6\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2} = 0$.
3) Expliciter les applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^2)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 + f_2 & = & \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2} \\ f_1 - 2f_2 & = & g - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2} \ . \end{array} \right.$$

Exercice 2 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.
1) Montrer que $(f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\mathrm{Id}_E) = f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E$.
2) Montrer que $f - 2\mathrm{Id}_E$ et $f - 3\mathrm{Id}_E$ commutent.
On suppose dans la suite de l'exercice que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0$.
3) Montrer que l'application f est inversible et préciser f^{-1} à l'aide de f.
4) Que dire de f si $f - 3\mathrm{Id}_E$ ou $f - 2\mathrm{Id}_E$ est inversible ?

Exercices sur applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Exercice 3 – On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4, 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4)$$

Soit $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbf{R}^4$.
1) Préciser l'image des vecteurs de la base $\mathcal{B}_4$. Quelle est la matrice f relativement à ces bases canoniques ?
2) Soit $u = (1, 2, 2, 1)$ et $D = \mathrm{Vect}\,(u)$, Déterminer une base du sous-espace vectoriel $f(D)$.
3) Soit $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $f(F)$.
4) Déterminer une base de l'image de f.
5) Déterminer $\ker f$.
6) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $f^{-1}(G)$.
7) Notons e_1, e_2, e_3, e_4 les vecteurs de la base $\mathcal{B}_4$. Montrer que $(f(e_1), f(e_2), f(e_4))$ est une base, notée $\mathcal{B}''$, de $\mathbf{R}^3$, puis montrer que $(e_1, e_2, e_4, 2e_1 + 2e_2 - e_3)$ est une base, notée $\mathcal{B}'$, de $\mathbf{R}^4$. Déterminer la matrice de f avec comme base de départ $\mathcal{B}'$ et comme base d'arrivée $\mathcal{B}''$, c'est à dire la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

Exercice 4 – Soit $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbf{R}^4$.
1) Expliciter l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ donnée par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$:

$$f(1,0,0) = (5,-8,-1,3) \quad , \quad f(0,1,0) = (2,-3,-2,-1) \quad , \quad f(0,0,1) = (-1,+2,-3,-5)$$

2) Préciser la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3)$?
2) Déterminer une base de l'image de f. L'application f est-elle surjective ?
3) Soit F le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $f(F)$.
4) L'application f est-elle injective ? Sinon préciser $\ker f$.
5) Notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base $\mathcal{B}_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_3 - 2e_2 + e_1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de $\mathbf{R}^4$, de sorte que :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ une application linéaire de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Préciser l'image des vecteurs de base de $\mathcal{B}$.
2) Soit $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, préciser $f(u)$.
3) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image. Donner uen équation de l'image de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
4) Le noyau et l'image de f sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
5) On pose $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E. Quelles sont les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 6 – On considére E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 18 \end{pmatrix}$$

1) Expliciter $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(x_1e_2 + x_2e_2)$ à l'aide de la matrice A.
2) Montrer que $\{u \in E \ ; \ f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 dont on précisera un vecteur de base que l'on notera u_1. Montrer que $\{u \in E \ ; \ f(u) = 17u\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 dont on précisera un vecteur de base que l'on notera u_2.

3) Montrer que (u_1, u_2) est une base de E. On notera $\mathcal{B}'$ cette base. Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4) Quels sont les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$? Donner la formule liant B, A et P. Vérifier cette formule.

Exercice 7 – Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^3, \mathbf{Q}^2)$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^2, \mathbf{Q}^3)$. Soit $\mathcal{B}_2$ la base canonique du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^2$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$. On donne f, h par leurs matrices dans les bases canoniques :

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{Q}) \quad , \quad C = \mathcal{M}(h, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{Q}) \, .$$

1) Préciser f et h.
2) Calculer AC et CA. De quelles applications et relativement à quelles bases AC et CA sont-elles les matrices ? Préciser alors ces applications linéaires.

Projection et symétrie

Exercice 8 – (suite de la feuille 4) Considérons P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + 3z = 0$ et D le sous-espace vectoriel $< (1, 1, 2) >$ de $\mathbf{R}^3$. On a montré que P et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
1) Expliciter p la projection vectorielle sur P parallèlement à D.
2) Quelle est la matrice A de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbf{R}^3$? Vérifier que $A^2 = A$.
3) Donner une base (u, v) de P. Montrer que $(u, v, (1, 1, 2))$ est une base $\mathbf{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}$.
4) Quelle est la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 9 – (suite de la feuille 4) On considére P_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ d'équations :

$$P_1 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} x - y + z + t & = & 0 \\ x + 2y - 2z + 4t & = & 0 \, . \end{array} \right.$$

et le sous-espace $P_2 =< (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1) >$.
On a montré que P_1 et P_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$ et on a donné une base (u_1, u_2) de P_1 et (u_3, u_4) de P_2
1) Expliciter s la symétrie vectorielle par rapport à P_1 parallèlement à P_2.
2) Quelle est la matrice A de s relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$? Verifier que $A^2 = \mathrm{Id}_4$.
3) Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbf{R}^4$ que l'on notera $\mathcal{B}$.
4) Quelle est la matrice de s relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$?

Exercice 10 – Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. Soit D_1 le sous-espace vectoriel $< (1, -1, 0) >$ de $\mathbf{R}^3$ et D_2 le sous-espace vectoriel $< (1, 0, -1) >$ de $\mathbf{R}^3$.
1) Montrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de P.
Soit $s \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(P)$ la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.
2) Quelle est la matrice de s relativement à la base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ de P ?
3) Soit $(x, y, z) \in P$ préciser $s(x, y, z)$.

Autres exercices

Exercice 11 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1. Montrer que les seules applications linéaires de E vers E sont les homothéties vectorielles.

Exercice 12 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = e_1 \ , \ f(e_2) = e_2 \ , \ f(e_3) = 17e_3 \ , \ f(e_4) = 0 \ .$$

1) Déterminer la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$. Préciser ensuite pour tout k entier $\mathcal{M}(f^k, \mathcal{B})$.
2) Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - 17\mathrm{Id}_E) \circ f = 0$ (on pourra utiliser que les endomorphismes $(f - \mathrm{Id}_E), (f - 17\mathrm{Id}_E), f$ commutent deux à deux).

Exercice 13 – On considére M le sous-ensemble de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3)$ formé des applications linéaires f telles que l'image de f est contenue dans le plan d'équation $x + y + z = 0$ et que le noyau de f contient le vecteur $(1, 1, 1)$. On note alors Mag l'ensemble des matrices des éléments de M dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
1) Montrer que Mag et M sont des sous-espaces respectivement de $\mathcal{M}(3, \mathbf{R})$ et de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3)$.
2) En exprimant les éléments de Mag à l'aide de 4 paramètres réels, préciser une base de Mag. Donner alors une base de M.

Exercice 14 – Soit e_1, e_2, e_3 les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
1) Soit $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3)$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_2$. Préciser la matrice J_3 de h dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ ainsi que l'application h.
2) Montrer que $h^3 = 0$ et que $h^2 \neq 0$. Préciser la matrice de h^2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ ainsi que l'application h^2.
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3)$ vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit alors $u \in \mathbf{R}^3$ satisfaisant $f^2(u) \neq 0$.
3) Supposons qu'il existe a, b, c trois réels tels que $au + bf(u) + cf^2(u) = 0$. En "appliquant à cette égalité " l'application f, puis f^2, montrer que a, b, c sont nuls. En déduire que la famille $\mathcal{B} = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
4) Déterminer la matrice de f dans cette base. Quelle est la matrice de $f + 2\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$ dans cette même base.
5) Traiter alors l'exemple :

$$h = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5) Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice de f dans cette base est :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbf{R}$, c'est à dire tout élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R})$.
1) Montrer que toute forme linéaire sur E non nulle est surjective et que son noyau est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
2) Rappeler l'expression générale des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$.
3)(plus difficile) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $1 \leq i \leq n$, on note e_i^* l'application de E dans $\mathbf{R}$ qui associe à un vecteur sa $i^{\text{éme}}$ coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R})$.
4) Expliciter cette base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ si $E = \mathbf{R}^n$ et si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R})$ et que V est un sous-espace vectoriel de E, on appelle restriction de f à V, notée $f_{|V}$, l'application : $f_{|V} : V \to \mathbf{R} \,:\, v \mapsto f_{|V}(v) = f(v)$.
5) Montrer que $f_{|V} \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{R})$.
6) (plus difficile) Montrer que l'application : $\phi : \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R}) \to \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(V, \mathbf{R}) \,:\, f \mapsto f_{|V}$ est linéaire et surjective.
7) En déduire que $\{f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R}) \ ; \ \forall v \in V \ : \ f(v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R})$ de dimension $\dim_{\mathbf{R}} E - \dim_{\mathbf{R}} V$.
8) Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $V =< (1, -1, 0), (1, 0, -1) >$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\{f \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}) \ ; \ \forall v \in V \ : \ f(v) = 0\}$ de $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Observez qu'à une telle base correspond une équation de V.