2 Systèmes linéaires

2.1 Introduction

Soit $n+1$ nombres réels, $a_1, \dots, a_n, b$, l'équation :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est appelée équation linéaire à coefficients réels de n variables. La donnée de m telles équations est appelée système de m équations linéaires à coefficients réels de n variables. Une solution d'un tel système est une famille de réels $(s_1, \dots s_n)$ vérifiant chacune des équations du système.

L'intersection de droites d'un plan ou de plans de l'espace se ramène après un choix de coordonnées à la résolution de systèmes liéaires. Mais beaucoup plus largement, il en est de même d'une immense quantité de problèmes apparaissant dans une immense quantité de domaines.

Par exemple dans le domaine de l'internet : l'objectif d'un moteur de recherche sur le réseau internet consiste à partir de mots clefs à classer les pages du réseau par ordre d'importance. Une simple modélisation ramène ce problème à la résolution d'un système d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est le nombre de pages liées aux mots clefs qui peut atteindre plusieurs millions.

La majorité des phénomènes physiques, biologiques,.. sont non-linéaires, mais la résolution numérique (sur ordinateur) des équations qui les décrivent se ramènent le lus souvent à la résolution de grands systèmes linéaires. Cet outil est donc un élément majeur du calcul scientifique et son utilisation est entrée aujourd'hui dans la vie quotidienne (prévision météorologique, assimilation de données,..). Beaucoup plus largement, la majorité des calculs scientifiques se ramène à la résolution de systèmes linéaires.
Les ordinateurs les plus récents et les plus puissants sont basés sur une programmation parallèle et nécessitent la mise au point de nouveaux algorithmes de résolution de systèmes linéaires utilisant au mieux cette notion

de parallélisation.

En une vingtaine de pages, ce paragraphe explique une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires basée sur l'algorithme de triangulation de Gauss qui décide si un système a des solutions ou le transforme en un système triangulé ayant les mêmes solutions. On exprime alors ces solutions communes à l'aide des variables libres du système triangulé.

Objectif : **Comprendre la méthode** de résolution proposée dans le cours et **pouvoir l'appliquer avec précision** pour résoudre par exemple des systèmes de trois équations à quatre variables (voir exercice 7 du sous-paragraphe **??**).

Les équations linéaires seront le plus souvent à coefficients réels. Mais, elles peuvent être à coefficients rationnels ou complexes. Ainsi, dans ce paragraphe, **K** désignera soit l'ensemble **Q** des nombres rationnels, l'ensemble **R** des nombres réels, ou l'ensemble **C** des nombres complexes. Il pourra désigner plus généralement un corps quelconque.

2.2 Définitions

Une équation linéaire à n variables : Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, $b \in \mathbf{K}$:

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est appelée équation linéaire à n variables. Les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelés variables, l'élément a_i est appelé le coefficient de la variable x_i, l'élément b est appelé constante ou second membre de l'équation E.

Si $b = 0$, on dit que l'équation E est homogène ou sans second membre.

Solution d'une équation linéaire à n variables : La donnée de n éléments $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de **K** est appelée solution de l'équation E si :

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Cas particuliers : Si $a_1 = \ldots = a_n = b = 0$ toutes données $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ est solution de E. Si $a_1 = \ldots = a_n = 0$ et $b \neq 0$, l'équation E n'a pas de solutions.

Système de m équations linéaires à n variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & & (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & & (E_m) \end{array} \right. .$$

Solution d'un système de m équations linéaires à n variables : C'est la donnée de n éléments $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\mathbf{K}$ solution de chacune des équations du système.

Exemple : Considérons le système à coefficients rationnels de 2 équations linéaires de variables x, y, z :

$$\left[\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 & (E_1) \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 & (E_2) \end{array} \right. .$$

Les triplets $(-2, 1, 1)$, $(168, -169, 1)$ sont solutions de ce système et il y en a d'autres ...

2.3 Transformation d'un système sans changer les solutions

Considérons les deux équations linéaires à n variables :

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & b & (E) \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n & = & b' & (E') \end{array} \right. .$$

On appelle équation obtenue en multipliant E par $\lambda \in \mathbf{K}$ et on note λE l'équation :

$$\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \cdots + \lambda a_nx_n = \lambda b \quad (\lambda E) \quad .$$

On appelle équation obtenue en soustrayant de l'équation E' l'équation E et on note $E' - E$ l'équation :

$$(a'_1 - a_1)x_1 + (a'_2 - a_2)x_2 + \cdots + (a'_n - a_n)x_n = b' - b \quad (E' - E) \quad .$$

Remarque 2.3.1 *Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, le système formé des 2 équations E et E' a les mêmes solutions que le système formé par les 2 équations E et $E' - \lambda E$.*

Cette remarque permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système d'équations linéaires :*

1. *Permuter deux équations,*
2. *Multiplier une équation par un élément non nul de $\mathbf{K}$,*
3. *Soustraire d'une équation le produit d'une autre par un élément de $\mathbf{K}$,*
4. *Supprimer ou ajouter l'équation : $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$.*

Exemple : Les deux systèmes suivants ont mêmes solutions :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 & (E_2) \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1) \\ & - & 3y & - & z & = & -2 & (E_2 - 2E_1) \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. .$$

En itérant la proposition **??**, on obtient que l'on ne modifie pas les solutions d'un système en conservant une équation de ce système et en soustrayant aux autres équations le produit par un élément de $\mathbf{K}$ de l'équation conservée. Par exemple, le sytème constitué des trois équations (E_1, E_2, E_3) a les mêmes solutions que le système de trois équations $(E_1 + 17E_2, E_2, E_3 - 19E_2)$.

Par contre, on prendra garde de ne pas aller trop vite. Le système constitué des deux équations (E_1, E_2) n'a que très rarement les mêmes solutions que le système de deux équations :

$$(E_1 - 2E_2, E_2 - \frac{1}{2}E_1) \quad .$$

2.4 Opérations sur les n-uplets d'éléments de K

Notation 2.4.1 *On note* $\mathbf{K}^n$ *l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets d'éléments de* $\mathbf{K}$*. Un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{K}$ *est la donnée de* n *éléments de* $\mathbf{K}$*.*

Nous allons définir sur $\mathbf{K}^n$ deux opérations : l'addition et la multiplication par un élément de $\mathbf{K}$.
Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbf{K}^n$, $s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Addition de s et s' : $s + s' = (s_1, s_2, \ldots, s_n) + (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) = (s_1 + s'_1, s_2 + s'_2, \ldots, s_n + s'_n)$,
Multiplication de s par $\lambda \in \mathbf{K}$: $\lambda s = \lambda(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (\lambda s_1, \lambda s_2, \ldots, \lambda s_n)$.

$\mathbf{K}^n$, muni de l'addition, est un groupe commutatif de neutre $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Autrement dit, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll}
\forall u, v, w \in \mathbf{K}^n & : \ (u+v)+w = u+(v+w) \quad , \text{ noté } \ u+v+w \quad , \\
\forall u \in \mathbf{K}^n & : \ u+0 = 0+u = u \quad , \\
\forall u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{K}^n & : \ u+(-u) = (-u)+u = 0 \quad , \text{ où } \ -u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \quad , \\
\forall u, v \in \mathbf{K}^n & : \ u+v = v+u \quad .
\end{array}$$

Quant à elle, la multiplication par un élément de $\mathbf{K}$ vérifie :

$$\forall u \in \mathbf{K}^n \ ; \ \forall \lambda \, , \mu \in \mathbf{K} \quad : \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u \quad \text{et} \quad 1u = u \quad .$$

Ces lois sont compatibles au sens suivant : $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall u, v \in \mathbf{K}^n$:

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad .$$

On notera que pour tout $u \in \mathbf{K}^n$: $0u = 0$ (dans cette égalité, le premier 0 est le zéro de $\mathbf{K}$, le deuxième 0 est le neutre $(0, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbf{K}^n$) et que $(-1)u = -u$ (dans cette égalité pour un corps quelconque $\mathbf{K}$, -1 est l'opposé du neutre de la multiplication de $\mathbf{K}$ et $-u$ l'opposé de u).

Muni de ces lois, nous dirons que $\mathbf{K}^n$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.4.2 *(combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{K}^n$) Soit r éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de $\mathbf{K}^n$ et r éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de $\mathbf{K}$. L'élément de $\mathbf{K}^n$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$ est appelé combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_r$.*

Cas particulier, $r = 1$: Pour $v \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, λv est appelé multiple de v.

Exemple 1 : Prenons, par exemple, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$.

$$4(1,2,3) - 2(-1,0,5) + \frac{3}{2}(-1,1,1) = (4 + 2 - \frac{3}{2}, 8 + 0 + \frac{3}{2}, 12 - 10 + \frac{3}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{7}{2})$$

est une combinaison linéaire dans $\mathbf{Q}^3$ des 3 éléments $(1,2,3)$, $(-1,0,5)$, $(-1,1,1)$.

Exemple 2 : Nous prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Nous allons utiliser nos opérations sur $\mathbf{R}^2$, pour expliciter les solutions de l'équation linéaire à deux variables :

$$(E) \quad 3x + 5y = 3 \quad .$$

Le couple de réels (x, y) est une solution de E si et seulement si :

$$3x = 3 - 5y \quad \text{ou encore} \quad x = 1 - \frac{5}{3}y \quad .$$

Si S désigne l'ensemble des solutions de E, on a donc :

$$S = \{(1 - \frac{5}{3}y, y) \quad \text{tels que} \quad y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2 \quad .$$

Ainsi, toute solution (x, y) de E est déterminée par la seule valeur de y.

Or, on vérifie que $(1 - \frac{5}{3}y, y) = (1, 0) + y(-\frac{5}{3}, 1)$. Ainsi :

$$S = \{(1, 0) + y(-\frac{5}{3}, 1) \quad \text{tels que} \quad y \in \mathbf{R}\} \quad .$$

En prenant en particulier $y = 0$, on obtient que $(1, 0) \in S$ (ce que l'on peut vérifier facilement). Les solutions de E sont ainsi l'ensemble des sommes de $(1, 0)$ avec les multiples de $(-\frac{5}{3}, 1)$.

Pour faire le lien avec la géométrie, considérons $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'application :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P} \quad , \quad (x, y) \longmapsto \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x, y)$$

identifie $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{P}$. Les solutions de l'équation E s'identifient alors à la droite de $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(1, 0)$ et de direction le vecteur de coordonnées $(-\frac{5}{3}, 1)$.

L'équation E est à coefficients rationnels. Donc, on peut l'étudier sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ des rationnels, le même calcul que pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ nous permet de montrer que les solutions dans $\mathbf{Q}^2$ de l'équation linéaire à deux variables :

$$(E) \quad 3x + 5y = 3$$

est

$$S' = \{(1, 0) + y(-\frac{5}{3}, 1) \quad \text{tels que} \quad y \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{Q}^2 \quad .$$

Géométriquement S' est constitué des points à coordonnées ratinonelles de la droite associée aux solutions S dans $\mathbf{R}^2$ de l'équation E.

2.5 Système triangulé d'équations linéaires

Considérons une équation linéaire à n variables :

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ou plus généralement un système de m équations linéaires à n variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

Dans un système , nous écrirons les variables suivant le même ordre. Ainsi, en lisant de la gauche vers la droite, x_1 est dite variable d'ordre 1 ou première variable, x_2 est dite variable d'ordre 2 ou deuxième variable, ... , x_n est dite variable d'ordre n ou dernière variable.

Définition 2.5.1 *(variable de tête d'une équation linéaire) La variable de tête d'une équation linéaire est la variable d'ordre le plus petit parmi celles qui ont un coefficient non nul.*

Définition 2.5.2 *(ordre d'une équation linéaire E) On appelle ordre de E, noté $v(E)$, l'ordre de la variable de tête de E.*

Exemple : Prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Soit l'équation linéaire de 4 variables u, v, w, t :

$$0u + 7v - \frac{1}{2}w + 4t = 9 \quad (E) \quad .$$

u, v, x, t sont respectivement les variables d'ordre 1, 2, 3, 4. La variable de tête de E est la deuxième variable v. Ainsi, l'équation E est d'ordre 2 : $v(E) = 2$.

Définition 2.5.3 *Le système de m équations linéaires à n variables :*

$$\left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right.$$

est dit ordonné si $v(E_1) \leq v(E_2) \leq \ldots \leq v(E_m)$ et triangulé si $v(E_1) < v(E_2) < \ldots < v(E_m)$.

Dans un système triangulé l'ordre des variables est strictement croissant. Il en résulte qu'un système triangulé a necessairement moins d'équations que de variables.

Exemple : Considérons le système :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 1 & (E_1) \\ & & 3y & + & 2z & = & 2 & (E_2) \\ & & & - & 4z & = & 9 & (E_3) \end{array}\right. \quad .$$

On a $v(E_1) < v(E_2) < v(E_3)$. Le système est donc triangulé.

Remarque : L'ordre d'une équation est défini si et seulement si cette équation n'est pas de la forme : $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$. Si les équations d'un système ne contiennent pas d'équations de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, on peut les permuter pour obtenir un système ordonné qui, d'après la propsoition **??**, a les mêmes solutions que le système de départ.

Exemple :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 & (E_1) \\ & & & & 4z & = & 2 & (E_2) \\ 7x & + & 5y & & & = & 9 & (E_3) \end{array}\right. \text{ non ordonné,} \qquad \left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 & (E_1) \\ 7x & + & 5y & & & = & 9 & (E_3) \\ & & & & 4z & = & 2 & (E_3) \end{array}\right. \text{ est ordonné.}$$

2.6 Algorithme de Gauss de triangulation d'un système

On se propose maintenant de donner un algorithme que nous appellerons "algorithme de triangulation de Gauss" concluant qu'un système d'équations linéaires E n'a pas de solution ou donnant un système d'équations linéaires triangulé ayant les mêmes solutions que E.

Considérons un système de m équations linéaires à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$:

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right. .$$

Sans en changer les solutions, on peut supposer que notre système E ne contient pas d'équation triviale $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. Sinon, on enlève ces équations triviales, ce qui ne modifie pas les solutions de E (proposition **??**). On notera que cette opération peut faire baisser le nombre d'équations de E. Une fois cela fait, quitte à permuter les équations de E, ce qui ne change pas ses solutions (proposition **??**), nous sommes dans la situation suivante :

- cas 1 : le système E contient une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$.
- cas 2 : le système E est ordonné : $v(E_1) \leq v(E_2) \leq \cdots \leq v(E_m)$.

Faisons alors tourner l'algorithme de Gauss.

Si on est dans le cas 1 : Stop, car le systéme E n'a pas de solution.

Si on est dans le cas 2 : Soit $1 \leq k(E)$, le **plus grand** des indices $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tels que

$$v(E_1) < v(E_2) < \cdots < v(E_k) \leq v(E_{k+1}) \leq \cdots \leq v(E_m) \quad .$$

-cas 2 a : $k(E) = m$, le systéme E est triangulé et stop !

-cas 2 b : $k(E) < m$: Soit alors x_r la variable de tête de $E_{k(E)}$. Pour $i > k(E)$, puisque le système E est ordonné : $r = v(E_{k(E)}) \leq v(E_i)$. Posons toujours pour $i > k(E)$:

$$E'_i = E_i - \frac{a_{i,r}}{a_{k(E),r}} E_{k(E)} \quad .$$

Par différence de deux équations d'ordre plus grand que r, E'_i est d'ordre plus grand ou égal à r. De plus, le coefficient $\dfrac{a_{i,r}}{a_{k(E),r}}$ est choisi pour que le coefficient de x_r dans E'_i soit nul. Autrement dit $v(E'_i > r$, car :

$$E'_i = 0x_1 + \cdots + 0x_r + a'_{i,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{i,n}x_n \quad .$$

Remplaçons alors E par le système :

$$(E') = (E_1 = E'_1, \ldots, E_{k(E)} = E'_{k(E)}, E'_{k(E)+1}, \ldots, E'_m) \quad .$$

On a :

$$v(E'_1) < v(E'_2) < \cdots < v(E'_{k(E)}) = r \text{ et pour } i > k(E) \; : \; v(E'_i) > r \quad .$$

A priori, seulement les $k(E)$ premières équations de E' sont ordonnées. Mais, le point est que les suivantes sont d'ordres strictement plus grands. Sans en changer les solutions, on peut supposer que notre système E' ne contient pas d'équations triviales $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. Cette opération qui consiste à retirer les équations triviales peut faire baisser le nombre d'équations de E'. Une fois cela fait, quitte à permuter les équations de E' pour ordonner E' ce qui ne change pas ses solutions (proposition **??**), nous sommes dans la situation suivante :
- cas 1 : le système E' contient une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$.
- cas 2 : le système E' est ordonné et plus précisement :

$$v(E_1) < \cdots < v(E'_{k(E)+1}) \leq v(E'_{k(E)+2}) \leq \cdots \leq v(E_m) \quad \text{et } k(E') > k(E) \quad .$$

Si on est dans le cas 1 : le système E' n'a pas de solution. Si on est dans le cas 2 et $k(E') = m$, le systéme E' est triangulé. Enfin, si on est dans le cas 2 et $k(E') < m$, on itère l'algorithme. Nous obtenons :

Proposition 2.6.1 *Soit E un système linéaire de m équations à n variables. En moins de $n-1$ étapes, l'algorithme de triangulation de Gauss montre que E n'a pas de solution ou permet de construire un système triangulé ayant les mêmes solutions que E.*

Nous montrerons dans la section suivante qu'un système triangulé a toujours des solutions.

Exemple : Considérons le système suivant :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} a & - & b & & & = & 0 & & (E_1) \\ 2a & + & b & - & c & = & 2 & & (E_2) \\ 2a & & & + & c & = & 3 & & (E_3) \end{array} \right. .$$

Les variables ordonnées sont a, b, c. Ce système est ordonné : $v(E_1) = v(E_2) = v(E_3) = 1$.

Étape 1 : Faisons tourner l'algorithme de Gauss. On obtient le système E' qui a la même solution que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} a & - & b & & & = & 0 & & (E'_1 = E_1) \\ & & 3b & - & c & = & 2 & & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & & 2b & + & c & = & 3 & & (E'_3 = E_3 - 2E_1) \end{array} \right. .$$

Ce système est ordonné, mais toujours pas triangulé : $v(E'_1) = 1 < v(E'_2) = v(E'_3) = 2$.

Étape 2 : Faisons tourner l'algorithme de Gauss. On obtient le système (E'') qui a même solution que (E) :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccl} a & - & b & & & = & 0 \qquad (E''_1 = E_1) \\ & & 3b & - & c & = & 2 \qquad (E''_2 = E'_2) \\ & & & & \frac{5}{3}c & = & \frac{5}{3} \qquad (E''_3 = E'_3 - \frac{2}{3}E'_2)) \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé $v(E''_1) < v(E''_2) < v(E''_3)$. Fin de l'algorithme.

En anticipant sur la section suivante et en remontant les équations, on peut montrer que $(1, 1, 1)$ est la seule solution de ce système.

2.7 Résolution d'un système triangulé d'équations linéaires

Pour résoudre un système d'équations linéaires, l'algorithme de Gauss nous ramène à savoir résoudre un système triangulé. Cette question fait l'objet de ce sous-paragraphe.

Définition 2.7.1 *(variables libres) On appelle variables libres d'un système d'équations linéaires triangulé les variables qui ne sont pas les variables de tête d'une équation de ce système.*

On ne parle donc de variables libres que pour un système d'équations linéaires triangulé.

Exemple : Prenons par exemple $K = \mathbf{Q}$ et considérons le système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 & (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 & (E_2) \\ & & & & & & 4t & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

Les variables sont x, y, z, t ordonnées dans cet ordre. Ce système est triangulé : $v(E_1) = 1$, $v(E_2) = 2$ et $v(E_3) = 4$. La variable x est variable de tête de la première équation, y de la seconde et t de la troisième.

Ainsi, le système admet z comme seule variable libre.

Nous allons maintenant montrer comment les solutions d'un système linéaire triangulé s'exprime à l'aide des variables libres.

La méthode est la suivante : on exprime la variable de tête de la dernière équation à l'aide des variables libres contenues dans cette équation, on remplace cette variable de tête par son expression dans les équations restantes, on obtient un système triangulé avec une équation de moins et il reste à itérer.

Exemple : Expliquons la méthode en détail sur l'exemple précédent :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 & (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 & (E_2) \\ & & & & & & 4t & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

Nous avons vu que z est la seule variable libre de ce système. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$ solution de E, la dernière équation donne : $t = \dfrac{1}{2}$. Le triplet (x, y, z) est donc solution de E si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 & (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 & (E_2) \end{array} \right. .$$

En remplaçant t par $\dfrac{1}{2}$ dans (E_1) et (E_2), on obtient que le triplet (x, y, z) est solution de E si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (E') \quad \left[\begin{array}{cccccccc} 5x & + & 2y & + & z & = & -\dfrac{1}{2} & (E'_1) \\ & & y & + & z & = & \dfrac{3}{2} & (E'_2) \end{array} \right. .$$

Le système E' est triangulé de variable libre z. La variable de tête y de E'_2 s'exprime facilement à l'aide de

z, on obtient : $y = \frac{3}{2} - z$. Le triplet (x, y, z) est donc solution de E si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{array}{lcl} 5x + 2y + z & = & -\frac{1}{2} \quad (E_1') \end{array}\right. .$$

En remplaçant y par $\frac{3}{2} - z$ dans (E_1'), on obtient que le triplet (x, y, z) est solution de E si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{array}{lcl} 5x - z & = & -\frac{7}{2} \quad (E_1'') \end{array}\right. .$$

Le système réduit à la seule équation (E_1'') est triangulé et de variable libre z. La variable de tête x de E_1'' s'exprime facilement à l'aide de z : $x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z$. On obtient ainsi que le triplet (x, y, z) est solution de E si et seulement si :

$$x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z \quad , \quad y = \frac{3}{2} - z \quad , \quad t = \frac{1}{2} \quad .$$

L'ensemble S des solutions du système est donc :

$$S = \{(-\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z, \frac{3}{2} - z, z, \frac{1}{2}) \text{ tel que } z \in \mathbf{Q}\} = \{(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) + z(\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \text{ tel que } z \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

Nous constatons un fait qui sera général, les solutions du système triangulé E sont paramétrées par les variables libres. A chaque valeur de z correspond une solution et inversement.

En prenant $z = 0$, on obtient que $(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ est solution du système. Ainsi, nous avons exprimé les solutions de notre système comme somme d'une solution $(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ de E et des multiples de $(\frac{1}{5}, -1, 1, 0)$.

On peut vérifier que :

$$\Sigma = \{z(\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \text{ tel que } z \in \mathbf{Q}\}$$

n'est pas n'importe quoi, c'est l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

appelé système homogène associé à E et obtenu en remplaçant par zéro les seconds membres des équations de E.

Notation 2.7.2 *Soit I un ensemble fini et $(b_i)_{i\in I}$ une famille déléments de $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{K}^n$). Nous noterons : $\sum_{i\in I} b_i$, la somme de tous les éléments de la famille $(b_i)_{i\in I}$. En particulier si $I = \{1, \ldots, n\}$:*

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \text{ , noté aussi } \sum_{i=1}^{n} b_i \quad .$$

Proposition 2.7.3 *Considérons un système triangulé E de m équations de variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit I l'ensemble des indices des variables libres de ce système. Alors, il existe pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ des u_i dans $\mathbf{K}$ nuls pour $i \in I$, il existe pour tout $i \in I$ et tout entier $j < i$ des éléments $u_{i,j} \in \mathbf{K}$ nuls pour $j \in I$ tels que l'ensemble des solutions de E soit :*

$$S = \{(u_1, \ldots, u_n) + \sum_{i\in I} x_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,i-1}, 1, 0, \ldots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Preuve : Désignons par J l'ensemble des indices des variables de tête des équations du système triangulé E. Le nombre d'éléments de J est le nombre d'équations du système E, $I \cup J = \{1, 2, \ldots n\}$ et $I \cap J = \emptyset$.

Par récurrence, on montre que $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de E si et seulement pour tout $k \in J$, x_k est donné par une expression linéaire des variables libres d'indices strictement supérieurs à k. Autrement dit,

$(x_1, \dots, x_n)$ est solution de E si et seulement pour tout $k \in J$ et tout $i \in I$ strictement plus grand que k, il existe $u_k \in \mathbf{K}$ et $u_{i,k} \in \mathbf{K}$ tels que :

$$x_k = u_k + \sum_{i>k\,,\,i\in I} u_{i,k} x_i \quad .$$

Pour $j \in I$: posons $u_j = 0$ et pour $i > j$ et $j \in I$: posons $u_{i,j} = 0$. On obtient que $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de E si et seulement :

$$(x_1, \dots, x_n) = (u_1, \dots, u_n) + \sum_{i\in I} x_i (u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0) \quad .$$

La proposition en résulte.

Une conséquence de la proposition est que tout système triangulé admet des solutions et admet une unique solution si et seulement si le nombre d'équation de ce système triangulé est égal au nombre de ses variables.

Dans l'expression des solutions d'un système triangulé donnée par la proposition **??**, si nous prenons $x_i = 0$ pour $i \in I$, nous constatons que $(u_1, \dots, u_n)$ est une solution de (E). On peut dire qu'il s'agit d'une solution particulière de E.

2.8 Synthèse : Résolutions des systèmes d'équations linéaires

Considérons un système de m équations linéaires à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$:

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

Définition 2.8.1 *Le système d'équations linéaires homogènes obtenu en remplaçant par zéro les seconds membres des équations E_i définissant E est appelé système homogène associé à E.*

On peut noter au passage qu'un système d'équations linéaires est homogène si et seulement s'il admet $(0,\dots,0)$ comme solution.

Résolution de E : Pour déterminer les solutions de E, on lui applique l'algorithme de Gauss de triangulation. Cet algorithme fournit un système E' ayant les mêmes solutions tel que

a) Soit E' contient une équation $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$ et E n'a donc pas de solution.

b) Soit E' est triangulé.

Dans le cas b, on résoud le système triangulé E' comme expliqué à la section précédente en partant de la dernière équation et en "procédant par itération successive". Si I désigne l'ensemble des indices des variables libres de E', il existe suivant la proposition **??** pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout entier $j < i$ des éléments $u_i \in \mathbf{K}$ et $u_{i,j} \in \mathbf{K}$ tels que l'ensemble des solutions de E soit :

$$S = \{(u_1, \dots, u_n) + \sum_{i \in I} x_i(u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Nous avons vu que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est alors une solution particulière de E. Les solutions de E s'expriment comme la somme d'une solution particulière $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et des combinaisons linéaires des r éléments $v_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ de $\mathbf{K}^n$ où r est le nombre de variables libres de E'.

On peut noter que

$$\{(\sum_{i \in I} x_i(u_{i,1}, \dots, u_{i,i-1}, 1, 0, \dots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\}$$

n'est autre que l'ensemble des solutions du système homogène associé à E. Cette assertion résulte du lemme suivant.

Lemme 2.8.2 *Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ une solution d'un système E d'équations linéaires à n variables. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $x = (x_1, \dots, x_n)$ *est solution de* E.

2. $x - u = (x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n)$ *est solution du système homogène associé à* E.

Preuve : Par hypothèse :

$$\left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n & = & b_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n & = & b_2 \\ & & \\ a_{m,1}u_1 + a_{m,2}u_2 + \cdots + a_{m,n}u_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

On a alors les équivalences :

$$\left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

et

$$\left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}(x_1 - u_1) + a_{1,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{1,n}(x_n - u_n) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1 - u_1) + a_{2,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{2,n}(x_n - u_n) & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}(x_1 - u_1) + a_{m,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{m,n}(x_n - u_n) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exemple : Travaillons avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Illustrons notre méthode pour résoudre le système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Ce systéme est ordonné. Appliquons l'algorithme de Gauss de triangulation :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & -\dfrac{1}{2}x_2 & - & \dfrac{3}{2}x_3 & - & \dfrac{3}{2}x_4 & = & \dfrac{3}{2} & (E_2 - \dfrac{1}{2}E_1) \end{array}\right. .$$

L'algorithme de Gauss a abouti en une étape puisque ce système est triangulé. Arrangeons un peu E' en multipliant sa deuxième équation par -2. On obtient le système triangulé (E'') ayant les mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \quad (E_2 - \frac{1}{2}E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables libres sont x_3 et x_4. La dernière équation donne :

$$x_2 = -3 - 3x_3 - 3x_4 \quad .$$

Reportons dans l'équation restante, on obtient :

$$2x_1 + 3\,(3 - 3x_3 - 3x_4) + x_3 + x_4 = 1 \ \text{, soit} \quad 2x_1 - 8x_3 - 8x_4 = 10 \quad .$$

D'où :

$$x_1 = 4x_3 + 4x_4 + 5 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{(4x_3 + 4x_4 + 5, -3 - 3x_3 - 3x_4, x_3, x_4) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(5, -3, 0, 0) + x_3(4, -3, 1, 0) + x_4(4, -3, 0, 1) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

En guise de vérification, on pourra observer que $(5, -3, 0, 0)$ est solution du système (E) et que les éléments $(4, -3, 1, 0)$ et $(4, -3, 0, 1)$ sont solutions du système homogène asocié à E :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

2.9 Exercices corrigés

Exercice 1 Exprimer comme la somme d'un élément de $\mathbf{R}^3$ et d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x et y le triplet de réels : (3x+2y+5 , x+3-7y , 2x-7y+4).

Solution : On a :

$$\begin{array}{rcl}(3x+2y+5\,,\,x+3-7y\,,\,2x-7y+4) & = & (5\,,\,3\,,\,4)+(3x\,,\,x\,,\,2x)+(2y\,,\,-7y\,,\,-7y)\\ & = & (5\,,\,3\,,\,4)+x(3\,,\,1\,,\,2)+y(2\,,\,-7\,,\,-7))\ .\end{array}$$

Exercice 2 (Question de cours) Qu'est ce qu'on appelle variables libres d'un système d'équations linéaires ?

Solution : Cela n'a de sens que pour un système triangulé d'équations linéaires. Pour un tel système E triangulé, les variables libres (voir définition **??** sont les variables qui ne sont pas variables de tête (voir définition **??**) d'une équation de E. La variable de tête d'une équation linéaire est la variable par laquelle commence cette équation, c'est à dire la variable d'ordre minimum ayant un coefficient non nul dans l'équation.

Exercice 3 Résoudre le système à coefficients réels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1)\\ 2x & - & y & - & z & = & 0 & (E_2)\\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6 & (E_3)\end{array}\right.\ .$$

Solution : Commençons par trianguler le système en utilisant l'algorithme de Gauss.
Le système E est ordonné : les trois équations sont d'ordre 1 : $v(E_1)=v(E_2)=v(E_3)=1$.

Etape 1 :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E'_1=E_1)\\ & & -3y & - & 3z & = & -6 & (E'_2=E_2-2E_1)\\ & & 2y & + & z & = & 3 & (E'_3=E_3-E_1)\end{array}\right.\ .$$

On a avancé puisque $v(E'_1)=1<v(E'_2)=v(E'_3)=2$.

Etape 2 :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E'_1)\\ & & -3y & - & 3z & = & -6 & (E'_2)\\ & & & & -z & = & -1 & (E'_3+(2/3)E'_2)\end{array}\right.\ .$$

Le système est triangulé : $v(E'_1) < v(E'_2) < v(E'_3 + (2/3)E'_2) = 3$. L'algorithme de Gauss est terminé.

Résolvons le système triangulé qui a même solution que le système de départ. Ce système triangulé n'a pas de variables libres. La dernière équation donne $z = 1$. Substituons $z = 1$ dans (E'_2), on obtient $y = 1$. Substituons $z = 1$ et $y = 1$ dans (E'_1), on obtient $x = 1$. $(1, 1, 1)$ est l'unique solution de notre système. Pour contrôler les calculs, on peut vérifier directement que $(1, 1, 1)$ est solution de E ....

Exercice 4 Nous prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Expliciter les solutions de l'équation linéaire à trois variables :

$$(E) \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \quad .$$

Donner trois solutions distinctes de E. Donner une interprétation également géométrique du résultat.

Solution : Ce système est triangulé de variables libres y et z. Le triplet de réels (x, y, z) est une solution de E si et seulement si :

$$x = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z \quad .$$

Ainsi, toute solution (x, y, z) de E est déterminée par les seules valeurs de y et z. Si S désigne l'ensemble des solutions de (E), on a donc :

$$S = \{(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z, y, z) \quad \text{tels que} \quad y\ ,\ z \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3 \quad .$$

Or, on vérifie :

$$(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z, y, z) = (1, 0, 0) + y(-\frac{1}{2}, 1, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1) \quad .$$

Ainsi :

$$S = \{(1, 0, 0) + y(-\frac{1}{2}, 1, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad y\ ,\ z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

En prenant en particulier $y = z = 0$, on obtient que $A = (1, 0, 0) \in S$. L'ensemble S est donc l'ensemble des sommes de $(1, 0, 0)$ avec toutes les combinaisons linéaires de $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$.

Si nous prenons dans S, $y = 2$ et $z = 0$, puis $y = 0$ et $z = 3$, on peut vérifier que $B = (0, 2, 0)$ et $C = (0, 0, 3)$ sont des éléments de S.

Considérons $\mathcal{E}$ un espace géomètrique muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application :

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathcal{E} \quad , \quad (x, y, z) \longmapsto \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x, y, z)$$

identifie $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{E}$. L'ensemble des solutions de l'équation E s'identifie alors au plan de $\mathcal{E}$ passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de direction les vecteurs de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$. Ce plan passe par les trois points de coordonnées A, B, C.

Exercice 5 Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, expliciter les solutions du système :

$$\left[\begin{array}{rcrl} x - 2y + z & = & 0 & (E_1) \\ -4x + 5y + 9z & = & -9 & (E_2) \end{array} \right. .$$

Ce système est ordonné. Faisons tourner l'algorithme de Gauss. Le système E équivaut au système :

$$\left[\begin{array}{rcrl} x - 2y + z & = & 0 & (E_1) \\ -3y + 13z & = & -9 & (E_2 + 4E_1) \end{array} \right. .$$

L'algorithme de Gauss est terminé puisque ce système est triangulé. Sa variable libre est z. Si (x, y, z) est une solution, on obtient $y = 3 + \frac{13}{3}z$. En substituant cette valeur de y dans le première équation, on obtient $x = 6 + \frac{23}{3}z$. Ainsi le triplet de réels (x, y, z) s'exprime à l'aide de z. L'ensemble S des solutions est donc :

$$S = \{(6 + \frac{23}{3}z, 3 + \frac{13}{3}z, z) \ ; \ z \in \mathbf{R}\} = \{(6, 3, 0) + z(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1) \ ; \ z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, S est l'ensemble des sommes de $(6, 3, 0)$ avec tous les multiples de $(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1)$. Géométriquement, S correspond à la droite passant par le point de coordonnées $(6, 3, 0)$ dirigée par le vecteur $(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1)$.

Exercice 6 Résoudre le système à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \quad (E_1) \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \quad (E_2) \end{array}\right. \quad .$$

Solution : Le système E est ordonné , car ses deux équations sont d'ordre 1 : $v(E_1) = v(E_2) = 1$. Commençons par trianguler le système en utilisant l'algorithme de Gauss.

Etape 1 :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1) \\ & & -3y & - & 3z & = & -6 & (E_2 - 2E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Le système est triangulé : $v(E_1) = 1 < v(E_2 - 2E_1) = 2$. L'algorithme de Gauss est terminé.

Résolvons le système triangulé E' qui a les mêmes solutions que E. La variable de tête de la première équation de E' est x, la variable de tête de sa seconde équation est y. Donc, z est la seule variable libre. Un système triangulé se résoud en remontant les équations. La dernière équation donne $y = 2 - z$. Reportons dans la première, on obtient : $x + 2 - z + z = 3$, soit $x = 1$. Ainsi, l'ensemble S des solutions est :

$$S = \{(1, 2 - z, z)\ ;\ z \in \mathbf{R}\} = \{(1, 2, 0) + z(0, -1, 1)\ ;\ z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

On vérifie en remarquant que $(1, 2, 0)$ est solution de E et $(0, -1, 1)$ est solution du système sans second membre :

$$\left[\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

Exercice 7 (Exercice type) On considère le système de trois équations linéaires à quatre variables à coefficients réels :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 & (E_1) \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 & (E_2) \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 & (E_3) \end{array}\right. \quad .$$

1) Donner en suivant avec rigueur l'algorithme du cours un système triangulé ayant même solution.
2) Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?
3) Expliciter les solutions réelles de $(*)$ à l'aide des variables libres.
4) Quelles sont les solutions du système sans second membre associé à $(*)$?

Solution :

1) Détaillons l'algorithme de triangulation. $v(E_1) = v(E_2) = v(E_3) = 1$, les trois équations de notre système $(*)$ sont d'ordre 1. Le système $(*)$ est ordonné. Triangulons le système en utilisant l'algorithme de Gauss.

Etape 1 :

$$(*') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 & (E'_1 = E_1) \\ & & & & & & t & = & 1 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 4t & = & 4 & (E'_3 = E_3 - 3E_1) \end{array} \right. .$$

Les équations sont respectivement d'ordre 1, 4 et 4. Le système $(*)$ est ordonné. Passons à l'étape suivante.

Etape 2 :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 & (E'_1) \\ & & & & & & t & = & 1 & (E'_2) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (E'_3 - 4E'_2) \end{array} \right. .$$

Supprimons l'équation triviale $0 = 0$:

$$(*'') \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 & (E'_1) \\ & & & & & & t & = & 1 & (E'_2) \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé et l'algorithme de Gauss est terminé.

2) Les variables de tête du système triangulé $(*'')$ sont t et x. Ses variables libres sont donc y et z.

3) Pour résoudre un système triangulé, on remonte les équations. La deuxième équation donne $t = 1$. En substituant dans la première équation, on obtient : $3x = 1 - 4y - z$, soit :

$$x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$S = \{(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z, 1) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Or, $(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z, 1) = (\frac{1}{3}, 0, 0, 1) + y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0)$. Ainsi :

$$S = \{(\frac{1}{3}, 0, 0, 1) + y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Pour vérifier les calculs, on peut remarquer que $(\frac{1}{3}, 0, 0, 1)$ est bien une solution de $(*)$.

4) Les solutions du système sans second membre associé à $(*)$:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 0 \end{array}\right.$$

sont :

$$S' = \{(y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Pour vérifier les calculs, on peut remarquer que $(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0)$ sont bien solutions de notre système homogène.