3 Matrices à coefficients dans un corps

3.1 Introduction

Une matrice par exemple à coefficients réels de n lignes et p colonnes est un tableau constitué de n lignes formées de p réels. L'ensemble de ces matrices est muni de deux opérations naturelles : addition et multiplication par un réel. Nous définissons de plus le produit "ligne-colonne" qui permet de multiplier une matrice n lignes et p colonnes par une matrice p lignes et m colonnes. L'intérêt de ces trois opérations provient de leurs nombreuses propriétés et de leurs compatibilités. En particulier, le produit "ligne-colonne" opère sur les matrices carrées de taille n (matrices n lignes et n colonnes). Ce produit est associatif et possède un élément neutre. Les matrices carrées qui admettent un inverse pour cette multiplication sont dites inversibles. Pour la multiplication matricielle, les matrices inversibles forment un groupe non commutatif appelé le groupe linéaire.

Les matrices élémentaires sont inversibles. La multiplication à gauche par une matrice élémentaire d'une matrice agit sur les lignes de cette matrice, tandis que la multiplication à droite agit sur ses colonnes. Les matrices élémentaires permettent par ce principe de simplifier une matrice. Ainsi, si nous ordonnons les lignes d'une matrice par l'ordre du premier coefficient non nul, nous donnons un algorithme qui transforme une matrice en une matrice échelonnée. Poursuivant cet algorithme, nous donnons un algorithme qui décide si une matrice est inversible et donne dans ce cas son inverse sous forme de produit de matrices élémentaires. Cet algorithme est la version matricielle de l'algorithme de triangulation d'un système linéaire.

A toute matrice carrée, il est possible d'associer un réel appelé déterminant de la matrice et dont la non nullité caractérise son inversibilité. Les déterminants permettent de calculer la comatrice d'une matrice et ainsi d'exprimer l'inverse d'une matrice. Nous détaillons cette théorie dans le cas des matrices de tailles deux et trois.

Les matrices codent les systèmes d'équations linéaires et ce codage est à la source du produit "ligne-colonne". Il existe plus précisement une correspondance entre système d'équations linéaires et équation matricielle que nous expliquons dans le dernier paragraphe.

Objectif :

1. Savoir multiplier des matrices et pratiquer le yoga des opérations sur les matrices.
2. Savoir calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 ou 3 par les deux méthodes :
   - calcul du déterminant et de la comatrice,
   - algorithme d'inversion à l'aide des matrices élémentaires.
3. Savoir passer d'un système d'équations linéaires à une équation matricielle et inversement.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Il pourra désigner plus généralement un corps quelconque.

3.2 Définitions

Définition 3.2.1 *Soit n et p deux entiers naturels. Une matrice $n \times p$ à coefficients dans K est la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ de np éléments de $\mathbf{K}$.*

Elle est représentée par le tableau à n lignes et p colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

L'élément $a_{i,j}$ de $\mathbf{K}$ est le terme de sa i-ème ligne et j-ème colonne qui est appelé le <u>terme général</u> de M. On dit que la matrice M est une matrice à n lignes et p colonnes.

Notation 3.2.2 *On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.*

Soit $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$, la matrice $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ est appelée matrice ligne.

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, la matrice : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est appelée matrice colonne.

On note 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Notation 3.2.3 *Les matrices à n lignes et n colonnes sont appelées matrices carrées de taille n. L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée. Les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux.

La matrice M est dite diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$: $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

La matrice M est dite triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$: $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

La matrice M est dite triangulaire supérieure stricte si $a_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$: $M = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & & & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & & a_{2,n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & a_{n-1,n} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

On définite de même les matrices triangulaires inférieures.

Enfin, on note $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Trois opérations sur les matrices à coefficients dans K :

Addition de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $N = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La somme de M et N est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont le terme général est $a_{i,j} + b_{i,j}$. Elle est notée $M + N$. Ainsi :

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & bb_{1,p} \\ & & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par un élément de K : Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, le produit de M par λ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont le terme général est $\lambda a_{i,j}$. Elle est notée λM. Ainsi :

$$\lambda M = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ & & \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Nous noterons $-M$ la matrice de terme général $-a_{i,j}$:

$$-M = \begin{pmatrix} -a_{1,1} & \dots & -a_{1,p} \\ & & \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

On observe que $-M = (-1)M$.

Ces deux opérations munissent $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel :

1. L'addition est une loi de groupe commutatif sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: pour tout $M, N, P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

$$\begin{array}{ll} (M+N)+P=(M+N)+P & \text{associativité ,} \\ M+N=N+P & \text{commutativité ,} \\ M+0=0+M=M & \text{0 est élément neutre ,} \\ M+(-M)=(-M)+M=0 & \text{existence d'un opposé .} \end{array}$$

2. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$:

$$\begin{array}{l} \lambda(\mu M)=(\lambda\mu)M \ , \\ \lambda(M+N)=\lambda M+\lambda N \ , \\ (\lambda+\mu)M=\lambda M+\mu M \ , \\ 1.M=M \ . \end{array}$$

Nous noterons $M - N = M + (-N)$.

Si $M_1, \dots, M_l \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbf{K}$, la matrice $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \cdots + \lambda_l M_l$ est appelé combinaison linéaire des matrices $M_1, \dots, M_l$.

Produit 'ligne-colonne" d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$: Nous allons définir une opération qui associera à $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ une matrice notée $MN \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ et appelée produit de M par N, et donc définir une application :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K}) \quad ; \quad (M,N) \mapsto MN \quad .$$

Commençons par définir ce produit dans le cas du produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, c'est à dire d'une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ par une matrice $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Ce produit est défini par l'application :

$$\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \quad ,$$

$$L = (a_1\, a_2\, \dots\, a_p) \quad , \quad C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \longmapsto LC = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p \quad .$$

À partir de là, le produit de $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ est la matrice MN dont le terme plaçé à la i-ème ligne et j-ème colonne est L_iC_j produit de la i-ème ligne de M par la j-ème colonne de N :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ & & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \longmapsto MN = \begin{pmatrix} L_1C_1 & \dots & L_1C_q \\ L_2C_1 & \dots & L_2C_q \\ & & \\ L_nC_1 & \dots & L_nC_q \end{pmatrix} \quad .$$

où $L_i = (a_{i,1}\, a_{i,2}\, \dots\, a_{i,p})$ est la i-ème ligne de M et $C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de N.

Ainsi, le terme général de la matrice $MN \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ est : $L_iC_j = \sum_{k=1}^{k=p} a_{i,k}b_{k,j}$. Le produit matriciel est appelé aussi appelé produit "ligne-colonne".

Proposition 3.2.4 *Dès qu'elles ont un sens, nous avons les égalités entre matrices :*

$$\begin{array}{lll} (MN)P = M(NP) & \text{noté : } MNP & , \\ M(N+P) = MN + MP & & , \\ (\lambda M)N = M(\lambda N) = \lambda(MN) & \text{noté : } \lambda MN & , \\ (M+N)P = MP + NP & & , \\ I_nM = MI_p = M & \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & . \end{array}$$

Transposition : C'est une application qui à $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ associe une matrice notée ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ appelée transposée de M définie par :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \quad , \quad M = (a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} \longmapsto {}^tM = (b_{i,j})_{1\le i\le p, 1\le j\le n} \quad \text{où} \quad b_{i,j} = a_{j,i} \quad .$$

Autrement dit, la i-ème ligne de ${}^tM$ est la i-ème colonne de M et la j-ème colonne de ${}^tM$ est la j-ème ligne de M. Ou encore, l'application transposée échange les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple : $\,^t\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.2.5 *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, dès qu'elles ont un sens, on a les égalités :*

$$\begin{array}{lcl} {}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN & , & {}^t(\lambda M) = \lambda({}^tM) \ , \\ {}^t(MN) = ({}^tN)\,({}^tM) & , & \\ {}^t({}^tM) = M & . & \end{array}$$

Preuve : laissée au lecteur. La formule ${}^t(MN) = ({}^tN)\,({}^tM)$ s'établit facilement après l'avoir vérifié dans le cas où M est une matrice ligne et N une matrice colonne de même longueur.

On notera que ${}^tI_n = I_n$.

Définition 3.2.6 *Une matrice carrée est dite symétrique si elle est égale à sa transposée.*

L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées : En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est muni de deux opérations :

$$\begin{array}{lll} \text{addition} & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ , \ (M,N) \longmapsto M+N \ , \\ \text{multiplication} & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \ , \ (M,N) \longmapsto MN \ . \end{array}$$

Muni de l'addition, nous avons vu que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un groupe commutatif. Mais, on a de plus :

a) La multiplication est associatice :

$$\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad (MN)P = M(NP) \ ,$$

b) Elle est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad M(N+P) = MN + MP \quad \text{et} \quad (M+N)P = MP + NP \ ,$$

c) La multiplication admet I_n comme élément neutre :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad I_n M = M I_n = M \ .$$

On résume toutes ces propriétés en disant que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un anneau unitaire. On notera qu'en général si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: $MN \neq NM$.

Notation 3.2.7 *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $MM = M^2$, $MMM = M^3$ et pour tout entier n, M^n le produit n fois de M par elle même.*

3.3 Matrices élémentaires

Proposition 3.3.1 *(***Définition de** $D_i(a)$*) Soit $n \geq 1$ un entier, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $a \in \mathbf{K}$. Il existe une unique matrice $D_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $D_i(a)M$ se déduit de M en multipliant la i-ème ligne de M par a sans changer les autres lignes.*

Preuve : Si $D_i(a)$ existe, $D_i(a) = D_i(a)I_n$. Ainsi, $D_i(a)$ est la matrice diagonale définie par $a_{i,i} = a$ et $a_{i,j} = 1$ si $j \neq i$. Il reste à voir que cette matrice convient.

Proposition 3.3.2 *(***Définition de** $T_{i,j}(\lambda)$*) Soit $n \geq 1$ un entier, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distincts et $\lambda \in \mathbf{K}$. Il existe une unique matrice $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $T_{i,j}(\lambda)M$ se déduit de M en ajoutant à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.*

Preuve : Si $T_{i,j}(\lambda)$ existe, $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(\lambda)I_n$. Ainsi, les termes diagonaux de la matrice $T_{i,j}(\lambda)$ sont égaux à 1 et le seul terme non diagonal non nul est λ placé à la i-ème ligne et j-ème colonne. Il reste à voir que cette matrice convient.

Exemple: Pour $n = 3$,

$$D_2(a) = D_2(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad T_{2,3}(\lambda) = T_{2,3}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Définition 3.3.3 (**Matrices élémentaires**) *Les matrices $D_i(a)$ pour $a \neq 0$ et $T_{i,j}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ sont appelés matrices élémentaires.*

Proposition 3.3.4 (**Définition de** $S_{i,j}$) *Soit $n \geq 1$ un entier et $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distincts. Il existe une unique matrice $S_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $S_{i,j}M$ se déduit de M en permutant la i-ème ligne et la la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.*

Preuve : La matrice $S_{i,j}$ est définie par son action sur I_n : $S_{i,j} = S_{i,j}I_n$. Il reste à voir que cette matrice convient.

Exemple : Pour $n = 3$, $S_{2,3} = S_{2,3}I_3 = S_{2,3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.3.5 On peut noter que $S_{i,j}$ est produit de matrices élémentaires :

$$S_{i,j} = D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1) \quad .$$

Preuve : Regarder l'action sur les lignes de la multiplication à gauche d'une matrice par :

$$D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1) \quad .$$

Proposition 3.3.6 *Soit $n \geq 1$ un entier, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $a \in \mathbf{K}$. La matrice $D_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'unique matrice vérifiant la propriété : pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, la matrice produit $MD_i(a)$ se déduit de M en multipliant la i-ème colonne de M par a sans changer les autres colonnes.*

Preuve : Même preuve que pour la proposition **??**. On notera que multiplier par a la i-ème ligne de I_n sans changer les autres lignes revient à multiplier par a la i-ème colonne de I_n sans changer les autres colonnes. On obtient dans les deux cas la matrice $D_i(a)$.

Proposition 3.3.7 *Soit $n \geq 1$ un entier, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distincts et $\lambda \in \mathbf{K}$. La matrice $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'unique matrice vérifiant la propriété : pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, la matrice produit $MT_{i,j}(\lambda)$ se déduit de M en ajoutant à la j-ème colonne de M le produit par λ de la i-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.*

Preuve : Même preuve que pour la proposition **??**. On notera que ajouter à la i-ème ligne de I_n le produit par λ de sa j-ème ligne sans changer les autres lignes revient à ajouter à la j-ème colonne de I_n le produit par λ de sa i-ème colonne sans changer les autres colonnes. On obtient dans les deux cas la matrice $T_{i,j}(\lambda)$.

Proposition 3.3.8 *Soit $n \geq 1$ un entier et $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ distincts. La matrice $S_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est l'unique matrice vérifiant la propriété : pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, la matrice produit $MS_{i,j}$ se déduit de M en permutant la i-ème colonne et la la j-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.*

Preuve : Même preuve que pour la proposition **??**. On notera que permuter la i-ème ligne et la j-ème ligne de I_n sans changer les autres lignes revient à permuter la i-ème colonne et la j-ème colonne de I_n sans changer les autres colonnes. On obtient dans les deux cas la matrice $S_{i,j}$.

Exemple pour $n = 3$:

$$T_{2,3}(17) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

On a :

$$T_{2,3}(17) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+17g & e+17h & f+17i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} T_{2,3}(17) = \begin{pmatrix} a & b & c+17b \\ d & e & f+17e \\ g & h & i+17h \end{pmatrix} \quad .$$

3.4 Matrices carrées inversibles

Définition 3.4.1 *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible, s'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $MN = NM = I_n$. La matrice N est alors unique, appelée inverse de M et notée M^{-1}.*

Montrons pour être complet l'unicité de l'inverse : Supposons M inversible. Si N' et N'' sont deux inverses se M. On a :

$$N'MN'' = (N'M)N'' = N'(MN'') = I_nN'' = N'I_n = N'' = N' \quad .$$

Noter que cette preuve utilise l'associativité de la multiplication matricielle qui est un point essentiel.

Notation 3.4.2 *Nous noterons* $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*.*

Proposition 3.4.3

1. *La matrice I_n est inversible d'inverse I_n.*
2. *Si M et N sont deux matrices carrées inversibles, la matrice produit MN est inversible et l'inverse de MN est :*
$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} \quad .$$
3. *Si M est une matrice carrée inversible, son inverse M^{-1} est inversible et l'inverse de M^{-1} est :*
$$(M^{-1})^{-1} = M \quad .$$
4. *Si M est une matrice carrée inversible, sa transposée ${}^tM$ est inversible et l'inverse de ${}^tM$ est :*
$$({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1}) \quad .$$

Preuve : 1) Cela résulte de l'identité $I_nI_n = I_nI_n = I_n$.
2) Soit M et N deux matrices carrées inversibles. Nous avons toujours grâce à l'associativité de la multiplication matricielle :

$$MN(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MI_nM^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

et

$$(N^{-1}M^{-1})MN = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}I_nN = N^{-1}N = I_n \quad .$$

Ainsi, MN est inversible d'inverse $(N^{-1}M^{-1}$.
3) Soit M une matrice carrée inversible. Par définition de l'inversibilité de M, nous avons :

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I_n \quad .$$

Cela implique que M^{-1} est inversible d'inverse M.
4) Soit M une matrice carrée inversible. En utilisant la formule sur la transposée d'une multiplication donnée dans la proposition **??**, nous obtenons :

$$ {}^t(M^{-1})^tM = {}^t(MM^{-1}) = {}^t(I_n) = I_n \quad . $$

De même, on montre ${}^tM\,{}^t(M^{-1}) = I_n$. Ainsi, ${}^tM$ est inversible d'inverse ${}^t(M^{-1})$.

Remarque 3.4.4 Il résulte en particulier de cette proposition que, muni du produit matriciel, $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$ est un groupe.

Proposition 3.4.5 *Les matrices élémentaires sont inversibles :*
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $a \in \mathbf{K}$ non nul :

$$ D_i(a)^{-1} = D_i(\frac{1}{a}) \quad . $$

Pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ disctincs et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$ T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) \quad \text{et} \quad (S_{i,j})^{-1} = S_{i,j} \quad . $$

Preuve : En revenant à la définition de $D_i(a)$ et $T_{i,j}(\lambda)$, on constate :

$$ D_i(\frac{1}{a})D_i(a)I_n = D_i(a)D_i(\frac{1}{a})I_n = I_n \quad \text{et} \quad T_{i,j}(-\lambda)T_{i,j}(\lambda)I_n = T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda)I_n = I_n \quad . $$

De même, on montre que $S_{i,j}S_{i,j} = I_n$. La proposition s'en déduit.

Définition 3.4.6 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que M est inversible à gauche, s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AM = I_n$. On dit que M est inversible à droite, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$.*

Lemme 3.4.7 *Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles à gauche (resp. à droite) est inversible à gauche (resp. à droite).*

Preuve : Soit M, N, A, B quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tels que $AM = I_n$ et $BN = I_n$. On a alors :

$$BAMN = B(AM)N = BI_nN = BN = I_n \quad .$$

Ainsi, si M et N sont inversibles à gauche, il en est de même de MN. De même, on montre que le produit de deux marices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles à droite est inversible à droite.

Notons qu'une matrice inversible est clairement inversible à droite et à gauche. Nous allons maintenant montrer un point plus spécifique à l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: une matrice carrée qui a un inverse à gauche (resp. à droite) est inversible.

Lemme 3.4.8 *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à gauche (resp. à droite) n'a pas de colonne (resp. ligne) nulle.*

Preuve : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à gauche et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AM = I_n$. Si la i-ème colonne de M est nulle, il résulte de la définition du produit "ligne-colonne" que la i-ème colonne de AM est nulle. C'est impossible puisque 1 est le coefficient de la la i-ème colonne et la i-ème ligne de I_n. De même, on montre qu'une matrice inversible à droite n'a pas de ligne nulle.

Lemme 3.4.9 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, inversible à gauche, alors M est produit de matrices élémentaires.*

Preuve : Pour $n = 1$, le lemme est évident. Soit $M \in \mathcal{M}_1(\mathbf{K})$ et $a \in \mathbf{K}$ le seul coefficient de M : $M = (a)$. L'hypothèse implique $a \neq 0$. Ainsi, $M = D_1(a)$ et $M^{-1} = D_1(1/a)$.
Montrons ce lemme pour $n = 2$. Soit a, b, c, d les coefficients de M :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad .$$

Supposons M inversible à gauche. D'après le lemme **??**, la matrice M n'a pas de colonne nulle. Donc a ou c est non nul.
Supposons $a \neq 0$:

$$T_{2,1}(-\frac{c}{a})\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \quad ,$$

$$(*) \quad D_2(a)\ T_{2,1}(-\frac{c}{a})\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

et

$$M' = D_2(a)\ T_{2,1}(-\frac{c}{a})\ M\ T_{1,2}(-\frac{b}{a}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice M' est produit de matrices inversibles à gauche (M l'est par hypothèse et les matrices élémentaires sont inversibles, donc inversibles à gauche). Il résulte du lemme **??** que la matrice M' n'a pas de colonne nulle. Ainsi, $ad - bc \neq 0$. On obtient alors en repartant de $*$:

$$D_1(\frac{1}{a})\ D_2(\frac{1}{ad-bc})\ D_2(a)\ T_{2,1}(-\frac{c}{a})\ M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(**) \quad T_{1,2}(-\frac{b}{a})\ D_1(\frac{1}{a})\ D_2(\frac{a}{ad-bc})\ T_{2,1}(-\frac{c}{a})\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En itérant la formule 2 de la proposition **??**, on obtient :

$$\left(T_{1,2}(-\frac{b}{a})\ D_1(\frac{1}{a})\ D_2(\frac{a}{ad-bc})\ T_{2,1}(-\frac{c}{a})\right)^{-1} = T_{2,1}(\frac{c}{a})\ D_2(\frac{ad-bc}{a})\ D_1(a)\ T_{1,2}(\frac{b}{a}) \quad .$$

En multiliant l'égalité $**$ à gauche par cette matrice, on obtient :

$$M = T_{2,1}(\frac{c}{a})\ D_2(\frac{ad-bc}{a})\ D_1(a)\ T_{1,2}(\frac{b}{a}) = T_{2,1}(\frac{c}{a})\ D_2(\frac{ad-bc}{a})\ D_1(a)\ T_{1,2}(\frac{b}{a}) \quad .$$

et donc M est produit de matrices élémentaires.
Supposons $a = 0$, le coefficient c est alors non nul. Soit :

$$M' = S_{1,2}M = S_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad .$$

D'après la remarque **??**, la matrice $S_{1,2}$ est produit de matrices élémentaires. Elle est inversible, donc la matrice $M' = S_{1,2}M$ admet un inverse à gauche. Vu sa forme, le première partie de la preuve nous apprend que M' est produit de matrice élémentaires. Il en est donc de même de $S_{1,2}M' = M$, ce qui achève la preuve du lemme dans le cas $n = 2$.
Pour n quelqconque : le principe de la preuve est le même que pour $n = 2$. Une preuve rigoureuse peut être obtenue en suivant l'algorithme décrit au dernier paragraphe.

Proposition 3.4.10 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *M est inversible ,*
2. *M est produit de matrices élémentaires ,*
3. *M est inversible à droite : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$,*
4. *M est inversible à gauche : il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AM = I_n$.*

On a alors $A = B = M^{-1}$.

Preuve : D'après le lemme $4 \Rightarrow 2$. Il est clair que $2 \Rightarrow 1$ et $1 \Rightarrow 4$, ainsi les propriétés $4, 2, 1$ sont équivalentes. Il reste à montrer que les propriétés 2 et 3 sont équivalentes. Il est clair que $2 \Rightarrow 3$. Montrons $3 \Rightarrow 1$. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$. Transposons cette égalité, on obtient :

$$^tB\,^tM = {}^tI_n = I_n$$

Donc, ^tM admet un inverse à gauche. Il en résulte que ^tM est produit de matrices èlémentaires. Ainsi, $^t(^tM) = M$ est produit de transposées de matrices élémentaires. Il reste à remarquer que la transposée d'une matrice élémentaire est élémentaire ce qui résulte précisément des égalités :

$$^t(D_i(a)) = D_i(a) \quad \text{et} \quad ^t(T_{i,j}(\lambda)) = T_{j,i}(\lambda) \quad .$$

Pour montrer $3 \Rightarrow 1$, on pourrait procéder directement comme ce qui est fait à gauche dans le lemme **??**.

La proposition nous apprend ainsi qu'une matrice inversible est produit de matrices élémentaires. Une telle décomposition n'est pas unique. On dit que le groupe $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles est engendré par les matrices élémentaires.

3.5 Matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ et de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$

Définition 3.5.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. On appelle déterminant de* A *et on note* $\det(A)$ *l'élément de* K *défini par* $\det(A) = ad - bc$*.*

Proposition 3.5.2 *Pour tout* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *:*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \quad , \quad \det(I_2) = 1 \quad , \quad \det({}^tA) = \det(A) \quad .$$

Preuve : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
det(AB) &= (aa' + cb')(bc' + dd') - (ba' + db')(ac' + cd') \\
&= aba'c' + ada'd' + bcb'c' + cdb'd' - aba'c' - bca'd' - adb'c' - cdb'd' \\
&= ada'd' + bcb'c' - bcc'd' - adb'c' = ad(a'd' - b'c') + bc(b'c' - a'd') \\
&= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') = (ad - bc)(a'd' - b'c') = \det(A)\det(B)
\end{aligned}$$

Les égalités $\det(I_2) = 1$ et $\det({}^tA) = \det(A)$ résultent de deux calculs directs faciles.

Proposition 3.5.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*. On a alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : Soit $a, b, c, d \in \mathbf{K}$. La proposition résulte des identités matricielles :

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2 \quad .$$

Si $\det(A) = 0$ et A inversible, on obtiendrait en multipliant à gauche l'identité matricielle $*$ par A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$$

Il en résulterait $A = 0$. d'où : $0 = A^{-1}A = I_2$ qui est impossible.
Si $\det(A) \neq 0$, on obtient le résultat annoncé en multipliant l'identité matricielle $*$ par l'inverse de $\det(A)$ et en utilisant la propriété générale $(\lambda M)N = M(\lambda N) = \lambda(MN)$ donnée dans la proposition **??**.

Définition 3.5.4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *On appelle mineur du coefficient* $a_{i,j}$ *le déterminant* $\Delta_{i,j}$ *de la matrice carrée de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *obtenue en enlevant à* M *sa* i*-ème ligne et sa* j*-ème colonne. Le coefficient* $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ *s'appelle le cofacteur de* $a_{i,j}$.

Définition 3.5.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *On appelle déterminant de* A *et on note* $\det(A)$ *l'élément de* K *défini par :*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{3,1}\Delta_{3,1} \\ &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}) \quad . \end{aligned}$$

Remarque 3.5.6 *Avec les notations de la définition* **??**, *on remarque que pour tout* $i \in \{1, 2, 3\}$ *:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{i+1}a_{1,i}\Delta_{1,i} + (-1)^{i+2}a_{2,i}\Delta_{2,i} + (-1)^{i+3}a_{3,i}\Delta_{3,i} \\ &= (-1)^{i+1}a_{i,1}\Delta_{i,1} + (-1)^{i+2}a_{i,2}\Delta_{i,2} + (-1)^{i+3}a_{i,3}\Delta_{i,3} \quad . \end{aligned}$$

La première formule est appelée développement du déterminant par rapport à la i*-ème colonne. La deuxième formule est appelée développement du déterminant par rapport la* i*-ème ligne.*

Proposition 3.5.7 *Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$:*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \quad , \quad \det(I_2) = 1 \quad , \quad \det({}^tA) = \det(A) \quad .$$

Preuve : La difficulté est la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. On peut la montrer par un calcul direct mais pénible (voir preuve de la proposition **??**). Le lecteur est invité à chercher une preuve plus simple. On doit pouvoir utiliser par exemple le fait qu'une matrice inversible s'écrit comme produit de matrices élémentaires.

Proposition 3.5.8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *La matrice A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *On a alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\mathrm{Com}(A))$$

où $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ *est la matrice de terme général le cofacteur de $a_{i,j}$:* $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Preuve : La proposition résulte des identités matricielles :

$$A\,{}^t(\mathrm{Com}(A)) = {}^t(\mathrm{Com}(A))\,A = \det(A)\,I_3$$

qui proviennent des égalités données dans la remarque **??**.

Ainsi, avec les notations de la proposition **??** si $\det(A) \neq 0$:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} {}^t\begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & -\Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ -\Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & -\Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & -\Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & -\Delta_{2,1} & \Delta_{3,1} \\ -\Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & -\Delta_{3,2} \\ \Delta_{1,3} & -\Delta_{2,3} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3} & -(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) & a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \\ -(a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,3}) & a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3} & -(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3}) \\ a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2} & -(a_{1,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{1,2}) & a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Proposition 3.5.9 *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ ou de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.*

1. *Si M possède une ligne de zéro,* $\det(M) = 0$.
2. *Si M est triangulaire,* $\det(M)$ *est le produit des éléments de sa diagonale.*
3. *Pour $i \neq j$, si M' est la matrice déduite de M en ajoutant à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes :* $\det(M') = \det(M)$.
4. *Pour $a \in \mathbf{K}$, si M' est la matrice déduite de M en en multipliant la i-ème ligne de M par a sans changer les autres lignes :* $\det(M') = a\det(M)$.
5. *Pour $i \neq j$, si M' est la matrice déduite de M en permutant la i-ème ligne de M et la i-ème ligne de M sans changer les autres :* $\det(M') = -\det(M)$.
6. *Mêmes énoncés avec les colonnes.*

Preuve: Les point 1 et 2 résultent de la formule donnant le déterminant. Pour le point 3 ; $M' = T_{i,j}(\lambda)M$. La matrice $T_{i,j}((\lambda)$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Son détérminant est 1. Il résulte des propositions **??** et **??** :

$$\det(M') = \det(T_{i,j}(\lambda)M) = \det(T_{i,j}(\lambda))\det(M) = \det(M) \quad .$$

Les points 4 et 5 se déduisent de même de $\det(D_i(a)) = a$ et, pour $i \neq j$, $\det(S_{i,j}) = -1$. L'ennoncé sur les colonnes résulte des propositions **??**, **??** et **??**.

3.6 Algorithmes d'échelonnage et d'inversion des matrices

Appelons opération élémentaire sur les lignes d'une matrice de $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, l'une des opérations suivantes :

- multiplication de la i-ème ligne de M par a sans changer ses autres lignes,
- ajouter à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes,

- permuter la i-ème ligne et la la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes,

Passons de M à M' en appliquant à M une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes. D'après les résultats du parapraphe **??**, il existe une matrice S produit de matrices élémentaires (voir définition **??**) et indépendante de M telle que $SM = M'$. On dira que S est associée à cette suite finie d'opérations élémentaires.

Expliquons maintenant le principe des deux algorithmes de ce paragraphe.

Remarque 3.6.1 *(principe des algorithmes sur les matrices) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, supposons construit :*

$$M_i \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad A_i M = M_i \quad .$$

Dans la pratique M_i sera plus "simple" que M et A_i produit de matrices élémentaires. Appliquons à M_i une suite d'opérations élémentaires Σ sur ses lignes qui la transforme en une matrice M_{i+1}. Appliquons à A_i <u>la même</u> suite d'opérations élémentaires Σ sur ses lignes qui la transforme en A_{i+1}. Alors :

$$M_{i+1} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad A_{i+1} M = M_{i+1}$$

Preuve : Soit S produit de matrices élémentaires associée à la suite d'opérations élémentaires Σ, on a : $SM_i = M_{i+1}$, mais aussi $SA_i = A_{i+1}$. Il en résulte :

$$M_{i+1} = SM_i = S(A_i M) = (SA_i)M = A_{i+1}M \quad .$$

On notera que si A_i est produit de matrices élémentaires, il en est de même de A_{i+1}. Dans la pratique, on choisira évidemment la suite d'opérations élémentaires Σ pour que M_{i+1} soit encore plus "simple" que M_i.

Définition 3.6.2 *Soit $L = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ une matrice ligne non nulle. On appelle ordre de L l'entier $v(L) = \inf\{i\ ;\ a_i \neq 0\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, notons L_i la i-ème ligne de M. Nous disons que M est ordonnée si :*

$$v(L_1) \leq v(L_2) \leq \cdots \leq v(L_k) \quad \text{et} \quad L_{k+1} = \cdots = L_n = 0 \quad .$$

Nou disons que M est échelonnée si :

$$v(L_1) < v(L_2) < \cdots < v(L_k) \quad \text{et} \quad L_{k+1} = \cdots = L_n = 0 \quad .$$

Exemple : $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
L n'est pas ordonnée, M est ordonnée et non échelonnée et N est échelonnée.

Algorithme d'échelonnage d'une matrice : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Cet algorithme fournira $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ produit de matrices élémentaires et une matrice $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ échelonnée telle que $BM = N$.

Départ : Le couple :

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad I_n \quad ; \quad I_n M = M \quad .$$

Étape 0 : Par une permutation des lignes (suite d'échange de deux lignes) de M, nous obtenons une matrice M_0 ordonnée. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice déduite de I_n par cette même permutation des lignes. Nous obtenons (voir remarque **??**) :

$$M_0 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad A_0 M = M_0 \quad ,$$

où A_0 est produit de matrices élémentaires.

Étape i :

$$M_i \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad A_i M = M_i \quad ,$$

où M_i est ordonnée, où l'ordre des i premières lignes de M_i est strictement croissant et où A_i est produit de matrices élémentaires.

Passage à l'étape $l > i$: En enlevant pour $j > i$, aux j-ème lignes de M_i des multiples ad-hoc de sa i-ème ligne, on obtient une matrice M' dont les lignes sont d'ordres strcitement plus grand que i. En permutant éventuellement les lignes de M', on obtient une matrice M_l où $l > i$ tel que M_l soit ordonnée et que l'ordre des l premières lignes de M_l soit strictement croissant. Appliquons ces mêmes opérations sur les lignes de A_i, nous obtenons une matrice notée A_l. On a ainsi construit un couple de matrices (M_l, A_l) tel que (voir remarque **??**) :

$$M_l \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_l \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad A_l M = M_l \quad ,$$

où M_l est ordonnée, où l'ordre des l premières lignes de M_l est strictement croissant et où A_l est produit de matrices élémentaires.

Proposition 3.6.3 *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'algorithme ci-dessus se termine en moins de n étapes sur un couple (N, A) tel que :*

$$N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad AM = N \quad ,$$

où N est une matrice échelonnée et A un produit de matrices élémentaires.

Exercice : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A produit de matrices élémentaires et une matrice échelonnée N telle que $AM = N$.

Solution de l'exercice : On part avec le couple de matrices :

$$(E_0) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 M = M \quad .$$

La permutation de la première ligne et de la troisième ligne de M est une matrice ordonnée. Permutons ainsi la première ligne et de la troisième ligne des deux matrices M et I_3, on obtient :

$$(E_1) \quad M_1 = S_{1,3} M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = S_{1,3} I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 M = M_1 \quad .$$

En ajoutant à la deuxième ligne de M_1 le produit par $-\frac{1}{4}$ de la première, on fait monter l'ordre de sa deuxième ligne. Ajoutons ainsi à la deuxième ligne des deux matrices M_1 et A_1 le produit par $-\frac{1}{4}$ de leurs premières lignes. On obtient :

$$(E_2) \quad M_2 = T_{2,1}(-\frac{1}{4})M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = T_{2,1}(-\frac{1}{4})A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2M = M_2 \quad .$$

En ajoutant à la troisième ligne de A_2 le produit par $-\frac{4}{3}$ de sa deuxième ligne, on fait monter l'ordre de la troisième ligne de M_2. Ajoutons ainsi à la troisième ligne des deux matrices M_2 et A_2 le produit par $-\frac{4}{3}$ de leurs deuxièmes. On obtient :

$$(E_3) \; M_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} , \; A_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } A_3M = M_3 \quad .$$

Ainsi, la matrice $A = A_3$ est produit de matrices élémentaires, $N = M_3$ est échelonnée et $AM = N$. On peut préciser la décomposition de A sous forme de produit de matrices élémentaires :

$$A = A_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3} \quad .$$

Algorithme d'inversion d'un matrice carrée : On se propose de donner un algorithme qui décidera si une matrice carrée est inversible et, si oui, donnera son inverse.

Lemme 3.6.4 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée inversible et échelonée. Alors, M est triangulaire supérieure et les éléments sur sa diagonale sont non nuls.*

Preuve : Une matrice carrée échelonée est clairement triangulaire supérieure. Si un élément diagonnal est nul, sa dernière ligne d'ordre plus grand ou égal à n ne peut être d'ordre n. Elle serait donc nulle. Mais alors

$MM^{-1} = I_n$ aurait aussi sa dernière ligne nulle. C'est impossible !

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Appliquons la proposition **??** lorsque M est une matrice carrée. L'algorithme d'échelonnage nous donne un couple de matrices carrées (N, A) :

$$N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad AM = N \quad ,$$

où N est une matrice échelonnée et A un produit de matrices élémentaires.

Cas 1 : Si N a une ligne constitué de zéro, suivant le lemme **??** : M n'est pas inversible

Cas 2 : Sinon, N est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Soit $a_{i,i}$ l'élément diagonal de N placé à sa i-ème ligne. Pour tout indice i tel que $a_{i,i} \neq 1$, multiplions la i-ème ligne de N et de B par $\dfrac{1}{a_{i,i}}$. On obtient (voir remarque **??**) un couple de matrices carrées (N_0, B_0) :

$$N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad B_0 M = N_0 \quad ,$$

où N_0 est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et B_0 un produit de matrices élémentaires.

Etape i : (N_i, B_i) un couple de matrices carrées (N_0, B_0) :

$$N_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad B_i M = N_i \quad ,$$

tels que N_i est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, que les i dernières lignes de N_i coïncident avec les i dernières lignes de I_n et que $B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit produit de matrices élémentaires.

Passage à l'étape $i+1$: Considérons la suite d'opérations élémentaires consistant à ajouter à la $(n-i-1)$-ème ligne de N_i des combinaisons des i lignes suivantes de sorte que la $(n-i-1)$-ème ligne de N_i devienne la

$(n-i-1)$-ème ligne de I_n. On obtient la matrice N_{i+1}. Appliquons cette même suite d'opérations aux lignes de B_i, on obtient la matrice B_{i+1}. Ainsi (voir remarque **??**) :

$$N_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad B_{i+1}M = N_{i+1} \quad ,$$

où N_{i+1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, où les $i+1$ dernières lignes de N_{i+1} coïncident avec les $i+1$ dernières lignes de I_n et où $B_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit produit de matrices élémentaires.

Proposition 3.6.5 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'algorithme d'échelonnage* **??** *nous donne un couple de matrices carrées (N, A) :*

$$N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad AM = N \quad .$$

Si N a une ligne constituée de zéro, M n'est pas inversible. Sinon l'algorithme ci-dessus se termine en moins de n étapes sur le couple (I_n, B) tel que :

$$B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad BM = I_n \quad ,$$

où B est un produit de matrices élémentaires. La matrice $M = B^{-1}$ est inversible et $M^{-1} = B$.

Exercice : Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer M^{-1} en suivant l'algorithme d'inversion. En déduire une écriture de M et M^{-1} et M comme produit de matrices élémentaires.

Solution de l'exercice : Cette exercice fait suite à celui illustrant la proposition **??**. Nous y avions obtenu le couple de matrices (A, N) :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } AM = N \quad .$$

où $A = T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3}$.

La matrice N est triangulaire avec des termes non nuls sur sa diagonale. Ainsi, nous pouvons déjà dire que M est inversible. Démarrons l'algorithme d'inversion à partir du couple (N, A).

La multiplication de la première ligne de N par $\frac{1}{4}$, de la deuxième par $\frac{4}{3}$ et le troisième par $\frac{3}{2}$ transforme la diagonale de N en une diagonale de 1. Effectuons ces opérations sur les matrices N et A. Nous obtenons le couple de matrices (N_0, B_0) :

$$(E_0') \quad N_0 = D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})N = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 2 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B_0 = D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4/3 & -1/3 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_0M = N_0 \quad .$$

Etape 1 : Ajoutons à la deuxième ligne de N_0 le produit par $-\frac{4}{3}$ de sa troisième ligne, cette deuxième ligne devient $(0\,1\,0)$. Ajoutons donc aux deuxièmes lignes des deux matrices N_0 et B_0 le produit par $-\frac{4}{3}$ de leurs troisièmes lignes. On obtient le couple (N_1, B_1) :

$$(E_1') \quad N_1 = T_{2,3}(-\frac{4}{3})N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B_1 = T_{2,3}(-\frac{4}{3})B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_1M = N_1 \quad .$$

Etape 2 : Ajoutons aux premières lignes des deux matrices N_1 et B_1 le produit par -2 de leurs troisièmes et le produit $-\frac{3}{4}$ de leurs deuxièmes. On obtient le couple (N_2, B_2) :

$$(E_2') \quad N_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)A_1 = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_2M = N_2 = I_3 \quad .$$

L'algorithme est terminé, car $N_2 = I_3$. On obtient : $M = (A_2)^{-1}$ et

$$M^{-1} = B_2 = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad .$$

On peut noter que :

$$M^{-1} = B_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})\,A \quad .$$

Soit :

$$M^{-1} = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3} \quad .$$

et

$$M = \left(T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3}\right)^{-1}$$

Compte-tenu de la formule 2 de la proposition **??** et de la proposition **??** qui précise l'inverse d'une matrice élémentaire, on obtient :

$$M = S_{1,3}T_{2,1}(\frac{1}{4})T_{3,2}(\frac{4}{3})D_1(4)D_2(\frac{3}{4})D_3(\frac{2}{3})T_{2,3}(\frac{4}{3})T_{1,3}(2)T_{1,2}(\frac{3}{4}) \quad .$$

Le déterminant de M est -2. Cela donne une preuve plus rapide de l'inversibilité de M. La formule donnée dans la proposition **??** permet également de retrouver rapidement l'inverse de M. On laisse au lecteur le soin de faire ce calcul.

3.7 Matrices et résolution de systèmes linéaires

Soit $a_{i,j}$, $b_i \in \mathbf{K}$. Considérons le système linéaire de m équations à n inconnues.

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \quad (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \quad (E_2) \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \quad (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

On alors $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est solution de E si et seulement si la matrice colonne : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie :

$$(E') \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \quad .$$

Cette remarque résulte de la définition du produit "ligne-colonne". Ainsi, un système d'équations linéaires correspond à une équation matricielle. Dans la pratique, on ne distingue pas toujours le système d'équations linéaires et l'égalité matricielle associée

La matrice A est appelée matrice associé au système E. Le système E est triangulée si et seulement si la matrice A est échelonnée.

Remarque 3.7.1 *Soit $B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$ une matrice inversible, notons $N = BA$. L'équation E' est alors équivalent à l'équation :*

$$(E'') \quad N \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : On passe de l'équation E' à l'équation E'' en multipliant l'équation E' par B et de l'équation E'' à l'équation E' en multipliant l'équation E'' par B^{-1}.

L'algorithme d'échelonnage d'une matrice (proposition **??**) nous permet de construire une matrice B produit de matrices élémentaires telle que $BA = N$ soit échelonné. Le systéme déquation linéaire associé à l'équation E'' est alors triangulé. Il reste à le résoudre.

Proposition 3.7.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée inversible et $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{K}$. Le système* *d'équations linéaires associé à l'équation* $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *admet comme unique solution :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la remarque **??** avec $B = A^{-1}$.

Cas particulier n=2 : Considérons le système de deux équations linéaires à deux variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 & (E_2) \end{array} \right. \quad .$$

La matrice associée à ce système est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad .$$

Si A est inversible, suivant le calcul de A^{-1} donné dans la proposition **??**, l'unique solution de E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne :

$$b_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}} \quad , \quad b_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}} \quad .$$

Cas particulier n=3 : Considérons le système de trois équations linéaires à trois variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = & b_2 & (E_2) \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = & b_3 & (E_3) \end{array} \right. .$$

La matrice associée à ce système est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} .$$

Si A est inversible, suivant le calcul de A^{-1} donné dans la proposition **??**, l'unique solution de E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3} & -(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) & a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \\ -(a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,3}) & a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3} & -(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3}) \\ a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2} & -(a_{1,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{1,2}) & a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Le calcul donne :

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_2 & a_{3,3} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} \quad , \quad x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} .$$

Exemple : Résoudre le système d'équations linéaires à coefficients réels.

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 & (E_1) \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

Solution : Ce systéme équivaut à l'égalité matricielle :

$$(E') \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Le déterminant de A est -2. Ainsi la matrice A est inversible et notre système de 3 équations à 3 inconnues admet donc une unique solution. Suivant la proposition **??**, nous obtenons :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, l'unique solution du système E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Analogie entre l'algorithme de triangulation linéaire et l'algorithme d'echelonnage d'une matrice : Considérons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

L'équation matricielle associée est :

$$(E') \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K}) \quad .$$

Conidérons alors, pour i distinct de j, le système d'équations linéaires déduit de E en ajoutant à la i-ème ligne de E le produit par λ de sa j-ème ligne sans changer les autres. On obtient le sytème :

$$T(E) \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + (a_{i,2} + \lambda a_{j,2})x_2 + \cdots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})x_n & = & b_i + \lambda b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \quad . \end{array} \right.$$

L'équation matricielle associée à $T(E)$ est :

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B' \quad ,$$

où les matrices A', B' se déduisent des matrices A, B en ajoutant à leurs i-ème lignes le produit par λ de leurs j-ème lignes sans changer les autres. Autrement dit :

$$A' = T_{i,j}(\lambda)A \quad \text{et} \quad B' = T_{i,j}(\lambda)B \quad .$$

On peut faire la même constatation pour la permutation de deux lignes ou la suppression d'une ligne $0 = 0$ d'un système d'équations linéaires. Cette remarque permettrait de donner une écriture purement matricielle de l'algorithme d'échelonnage et de l'algorithme de résolution d'équations linéaires.

Considérons un système de n équations homogènes à n inconnues :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & 0 \quad . \end{array} \right.$$

Le système matriciel équivalent associé est le système :

$$(E') \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

où A est la matrice carrée de terme général a$_{i,j}(termeplac\acute{e}\grave{a}la$i$-\grave{e}meligneet$j$-\grave{e}mecolonne.$

Dans le chapître sur les espaces vectoriels;, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.7.3 *Un système de n équations homogènes à n inconnues admet $(0, 0, \ldots, 0)$ comme seule solution si et seulement si la matrice carrée associée à ce système est inversible.*

Preuve : Considèrons le système E ci-dessus. Il a même solution que le système matriciel E'. Si A est inversible, multiplions E' par A^{-1}, on obtient :$(x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Inversement si A n 'est pas inversible, nous avons vu qu'il existe une matrice carrée inversible (car produit de matrices élémentaires) et triangulaire supérieure C telle que la dernière ligne de AC soit nulle. Comme C est inversible, l'équation matricielle E' équivaut à l'équation matricielle :

$$(E') \quad (CA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Le système d'équations linéaires correspondant à E'' est un système triangulé de $m < n$ équations équations homogènes à n inconnues. Ce système admet donc au moins une variable libre. Il a donc plus d'une solution.

3.8 Suites récurrentes et matrices

Soit n un entier et pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ une famille $a_{i,j}$ et b_i d'éléments de $\mathbf{K}$.

On considère une suite d'éléments $u_k = (u_1(k), u_2(n), \ldots, u_n(k))$ de $\mathbf{K}^n$ définie par :

$$u_0 = (b_1, \ldots, b_n)$$

et pour tout $k \in \mathbf{N}$ par la relation de recurrence :

$$(E_k) \quad \left[\begin{array}{lcl} u_1(k+1) & = & a_{1,1}u_1(k) + a_{1,2}u_2(k) + \cdots + a_{1,n}u_n(k) \\ u_2(k+1) & = & a_{2,1}u_1(k) + a_{2,2}u_2(k) + \cdots + a_{2,n}u_n(k) \\ & & \\ u_n(k+1) & = & a_{n,1}u_1(k) + a_{n,2}u_2(k) + \cdots + a_{n,n}u_n(k) \end{array} \right. \quad .$$

La suite $u_k = (u_1(k), u_2(k), \ldots, u_n(k))$ de $\mathbf{K}^n$ vérifie ces conditions si et seulement si la suite de matrices colonnes $\begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix}$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad , \forall k \in \mathbf{N} \; , \quad \begin{pmatrix} u_1(k+1) \\ \vdots \\ u_n(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix} \quad ,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice carrée de terme général $a_{i,j}$.

On obtient alors par récurrence que pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Pour préciser la suite solution, toute la difficulté revient à calculer pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$A^k \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

On rappelle que par convention $A^0 = I_n$.

Suites récurrentes linaires dordre p :

Soit $p \geq 1$ un entier, soit $a_0 \neq 0, a_1, \dots a_{p-1} \in \mathbf{K}$ et $b_0, \dots, b_{p-1} \in \mathbf{K}$. Considérons la suite u_i déléments de $\mathbf{K}$ définie par :

$$u_0 = b_0\ ,\ u_1 = b_1\ , \dots ,\ u_{p-1} = b_{p-1}$$

et pour tout entier $k \geq 0$:

$$u_{p+k} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \cdots + a_{p-1} u_{k+p-1} \quad .$$

Par récurrence, on montre que cette suite est bien définie. On dit qu'il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre p.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques de raison a_0.

Posons pour tout entier $k \geq 0$: $v_k = (v_k(1), v_k(2), \dots, v_k(p)) = (u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+p-1})$. On obtient ainsi une suite v_k de $\mathbf{K}^p$ associée à la suite de scalaire u_k. Nous avons :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
v_{k+1}(1) & = & u_{k+1} & = & 0 & + & v_k(2) & + & 0 & + & \cdots & + & 0 \\
v_{k+1}(2) & = & u_{k+2} & = & 0 & + & 0 & + & v_k(3) & + & \cdots & + & 0 \\
\vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
v_{k+1}(p-1) & = & u_{k+p-1} & = & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & v_k(p) \\
v_{k+1}(p) & = & u_{k+p} & = & a_0 v_k(1) & + & a_1 v_k(2) & + & a_2 v_k(3) & + & \cdots & + & a_{p-1} v_k(p) \quad .
\end{array}$$

La suite de matrices colonnes $\begin{pmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_p(k) \end{pmatrix}$ vérifie donc :

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ \vdots \\ v_p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ,\ \forall k \in \mathbf{N}\ , \quad \begin{pmatrix} v_1(k+1) \\ \vdots \\ v_p(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_p(k) \end{pmatrix} \quad ,$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ est la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte par récurrence :

$$\begin{pmatrix} v_1(k) \\ \vdots \\ v_p(k) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \end{pmatrix} \quad .$$

Pour tout k, $u_k = v_1(k)$ est donc donné par cette identité. Là encore, la difficulté reviendra à calculer pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$A^k \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \end{pmatrix} \quad .$$