4 Espaces vectoriels

Dans cette section, $\mathbf{K}$ désignera un corps, par exemple $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

4.1 Introduction

Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi d'addition qui permet d'ajouter deux éléments de E (appelés vecteurs) et d'une multiplication qui permet de multiplier un élément de E par un élément de $\mathbf{K}$ (appelé scalaire). Autrement dit, un espace vectoriel est un espace dans lequel on peut faire des combinaisons linéaires : si $u_1, \ldots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$ a un sens et appelé une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Une famille $u_1, \ldots, u_p$ de vecteurs de E est dite libre, si la seule combinaison linéaire nulle de $u_1, \ldots, u_p$ est la combinaison $0u_1 + \cdots + 0u_p$. Elle est dite génératrice, si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$. La famille $u_1, \ldots, u_p$ est une base, si c'est une famille libre et génératrice. Dans ce cas, tout vecteur u de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Les coefficients ce cette combinaison sont alors appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$.

Supposons qu'un espace vectoriel E possède une base de n éléments. Fort de notre savoir sur la résolution des systèmes linéaires homogènes, nous montrons qu'une famille libre a n ou moins de n vecteurs. Il en résulte que toute base de E a le même nombre d'éléments appelé la dimension de E.

Objectif

- Connaître les définitions de base de la théorie : $\mathbf{K}$-espace vectoriel , sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, vecteur nul, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage ...

- Soit E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base, considérons une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base : Savoir décider si cette famille est libre ou si c'est une base de E.
- Soit E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on suppose que les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base à l'aide de ses cordonnées dans l'autre base, savoir déterminer les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$, savoir donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, savoir donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

4.2 Définition, exemples

Définition 4.2.1 *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est la donnée d'un ensemble E muni de deux lois :*

- *une loi interne dite d'addition et notée $+$, c'est à dire de l'application :*

$$E \times E \to E \quad , \quad (u,v) \mapsto u+v$$

- *une loi externe dite de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement, c'est à dire de l'application :*

$$K \times E \to E \quad , \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

asujetties aux conditions a, b, c suivantes :

a) L'addition est une loi de groupe commutatif :

i) Associativité : $\forall\, u,v,w \in E$, $(u+v)+w = u+(v+w)$. Cet élément est alors noté $u+v+w$.

ii) Existence d'un élément neutre : il existe un élément noté $0 \in E$ (ou $\vec{0}$, ou encore 0_E) tel que pour tout $u \in E$: $u+0 = 0+u = u$.

iii) Existence d'un opposé : pour tout élément $u \in E$, il existe un élément noté $-u \in E$, appelé opposé de u , tel que $u+(-u) = (-u)+u = 0$.

iv) Commutativité : $\forall\, u, v \in E$, $u + v = v + u$.

b) La loi externe vérifie pour tout $u \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$ *:* $\lambda(\mu\, u) = (\lambda\mu)\, u$ *et* $1u = u$ *où* 1 *est le neutre de la multiplication de* K*.*
c) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $u, v \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$ *:*

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \ .$$

Les éléments d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E sont appelés vecteurs de E et les éléments du corps $\mathbf{K}$ sont appelés scalaires.

Exemples
1) Le corps $\mathbf{K}$ lui même muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
2) L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbf{K}$:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ .$$

3) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de $\mathbf{K}$:

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \text{ et } \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j}) \ .$$

4) Le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni de son addition et de la mutliplication naturelle par les nombres réels.
5) L'ensemble des applications d'un ensemble X vers un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E où si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont des applications de X vers E et $\lambda \in \mathbf{K}$, les applications $f + g$ et λf sont :

$$f + g : X \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ,$$

$$\lambda f : X \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x) \quad .$$

4.3 Sous-espaces vectoriels

Dans cette sous-section, E désignera un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.3.1 *Une sous-ensemble non vide F de E est appelé sous-espace vectoriel de E si F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire, c'est à dire si :*

$$\forall u, v \in F\ ,\ \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad : \quad u+v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F\ .$$

Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E, les deux applications suivantes :

$$F \times F \to F \quad , \quad (u,v) \mapsto u+v \quad \text{et} \quad K \times F \to F \quad , \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

sont bien définies. Le lecteur vérifiera qu'elles munissent F d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel qui sauf précision sera la structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel considérée sur F. L'addition dans F est en particulier une loi de groupe commutatif.

Il résulte de la définition **??** que tout sous-espace vectoriel F de E contient 0_E et que 0_E reste le neutre pour l'addition de F. On notera également que si $u \in F$, où F est un sous-espace vectoriel F de E, l'opposé $-u = (-1)u$ de u dans E appartient à F et est aussi son opposé dans F.

Premiers exemples
1) E et l'ensemble $\{0_E\}$ réduit au zéro de E sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) L'ensemble des nombres réels est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des nombres complexes.

Proposition 4.3.2 *L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve : Montrons par exemple que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E. De même, $0_E \in F_2$. Ainsi, $0_E \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est donc non vide. Soit $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En particulier, u et v sont deux éléments de F_1. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E : $u+v \in F_1$ et $\lambda u \in F_1$. De même, on montre que $u+v \in F_2$ et $\lambda u \in F_2$. Ainsi, $u+v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda u \in F_1 \cap F_2$. Cela montre que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 4.3.3 *Les solutions d'un système de p équations linéaires homogènes (c.a.d. sans seconds membres) à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.*

Preuve : Commençons par montrer que les solutions d'une seule équation linéaire homogène à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, désignons par F le sous-ensemble de $\mathbf{K}^n$ constitué des solutions de l'équation linéaire :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad .$$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Tout d'abord, F est non vide puisqu'il contient $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ le neutre de l'addition de $\mathbf{K}^n$. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, x_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi :

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1y_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ny_n = 0 \,.$$

Rappelons que :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \,.$$

Il résulte de $*$ que :

$$\begin{aligned} a_1(x_1+y_1) + a_2(x_2+y_2) + \cdots + a_n(x_n+y_n) &= (a_1x_1 + a_1y_1) + (a_2x_2 + a_2y_2) + \cdots + (a_nx_n + a_ny_n) \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \cdots + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ &= \lambda 0 \;=\; 0 \quad . \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $x + y$ et λx sont des éléments de F. Donc, F un un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Traitons maintenant le cas d'un système d'équations linéaires. L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est l'intersection des solutions de chaque équation de ce système, la proposition se déduit alors de la proposition **??**.

Définition 4.3.4 *Soit* $u_1, \ldots, u_p \in E$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$*. Le vecteur* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$ *est appelé une combinaison linéaire de* $u_1, u_2, \ldots, u_p$*. On note* $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *l'ensemble des combinaisons linéaires de* $u_1, u_2, \ldots, u_p$*.*

Proposition 4.3.5 *Soit* $u_1, \ldots, u_p \in E$*, alors* $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *appelé le sous-espace vectoriel engendré par* $u_1, \ldots, u_p$*.*

Preuve : On a $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_p$. Donc, $0_E \in Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ qui est donc non vide. Soit $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ et $w = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_p u_p$ où $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{K}$ deux combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} v + w = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) + (\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_p u_p) &= (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \cdots + (\lambda_p + \mu_p) u_p \\ \lambda v = \lambda(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) &= (\lambda\lambda_1) u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_p) u_p \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, $v+w$ et λv sont des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_p$. On a ainsi montré que $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est non vide et stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 4.3.6 *On notera en particulier que si* $u_1, \ldots, u_p$ *appartiennent à un sous-espace vectoriel* F *de* E*, toute combinaison linéaire de* $u_1, \ldots, u_p$ *est un vecteur de* F*. Ainsi,* $\mathrm{vect}(u_1, \ldots, u_p)$ *est un sous-espace vectoriel de* F*. Plus généralement, on peut noter qu'un sous-espace vectoriel d'un sous-espace vectoriel* F *de* E *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

4.4 Famille libre, famille génératrice et base

Dans cette sous-section, E désignera un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.4.1 *Soit* $v_1, v_2, \ldots, v_p \in E$*.*
a) On dit que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *est une famille génératrice de* E*, si tout vecteur de* E *est combinaison linéaire de* $v_1, v_2, \ldots, v_p$*. Autrement dit, si* $E = Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *ou encore si pour tout* $v \in E$*, il existe* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ *tel que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \quad .$$

b) On dit que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est libre, si pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0 \quad .$$

Une famille non libre est dite liée.
c) On dit que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de E, si cette famille est libre et génératrice.

On notera que dire que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est liée, c'est dire qu'il existe une "relation non triviale" entre les v_i, c'est à dire des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \quad .$$

Exemples
1) Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathbf{K}^n$ forment une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbf{K}^n$.
2) Soit $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m$ et $E_{k,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ dont le seul terme non nul vaut 1 placé à la k-ième ligne et l-ième colonne. Autrement dit, si $a_{i,j}$ est le terme général de $E_{k,l}$, $a_{i,j} = 1$ si $(i, j) = (k, l)$ et 0 sinon. Alors, la famille $(E_{k,l})_{0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. on peut noter que cette base à nm éléments.
3) Les nombres complexes 1 et i forment une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Notons qu'une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

Exercice Considérons les vecteurs $v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (3, 4, -1, 0, 0)$ $v_3 = (1, 3, 7, -2, 17)$ de $\mathbf{R}^5$. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbf{R}^5$.

Solution Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$, on remarque que :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = (-2a + 3b + c, a + 4b + 3c, -b + 7c, -2c, 17c) \quad .$$

Ainsi, si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbf{R}^5}$, les réels a, b, c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a+3b+c & = & 0 \\ a+4b+3c & = & 0 \\ -b+7c & = & 0 \\ 17c & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

On en déduit $c = 0$, puis $b = 0$ et enfin $a = 0$. Cela montre que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbf{R}^5$.

Exercice Considérons les vecteurs $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (-2,1)$ $v_3 = (1,1)$ de $\mathbf{R}^2$. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une famille liée de $\mathbf{R}^5$.

Solution Nous devons montrer qu'il existe trois réels a, b, c non tous nuls tels que :

$$(E) \quad av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \quad .$$

Allons y et cherchons tous les triplets de réels (a, b, c) tels que :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \quad .$$

En remplaçant les v_i par leurs valeurs, on trouve :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = (a - 2b + c, 2a + b + c) \quad .$$

Ainsi, l'équation E est équivalente au système d'équations linéaires :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccc} a & - & 2b & + & c & = & 0 \quad (E_1) \\ 2a & + & b & + & c & = & 0 \quad (E_2) \end{array}\right. \quad .$$

Résolvons ce système en appliquant avec soin l'algorithme de résolution. Le système E a même solution que le système triangulé :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccc} a & - & 2b & + & c & = & 0 \quad (E_1) \\ & & 5b & - & c & = & 0 \quad (E_2 - 2E_1) \end{array}\right. \quad .$$

La variable c est la seule variable libre de ce systéme triangulé. En remontant les équations, on trouve que l'ensemble S des triplets cherchés est :

$$S = \{c(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1) \text{ tel que } \ c \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ce sytème a une infinité de solutions. Il a donc au moins une solution (a, b, c) avec a, b, c non tous nuls (dite solution non triviale). Donc, la famille (v_1, v_2, v_3) est liée. Par exemple, en prenant $c = 1$, on obtient la solution non triviale : $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1)$. Ansi :

$$-\frac{3}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + v_3 = 0 \quad .$$

Proposition 4.4.2 *L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$ fournit une base de l'espace vectoriel de ses solutions.*

Preuve : Un système d'équations linéaires homogènes a au moins $(0, \dots, 0)$ comme solution. Partant d'un système d'équations linéaires homogènes E, l'algorithme de trianguation de Gauss fournit donc un système d'équations linéaires homogènes triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Soit $x_1, \dots, x_n$ les variables de ce sytème, suivant la proposition 3.7.3 du chapître 3, l'algorithme de résolution exprime l'espace vectoriel F des solutions de E comme l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs $(v_i)_{i \in I}$ où I est l'ensemble des indices des variables libres du système triangulé E'. On constate que pour tout $x_i \in \mathbf{K}$ et $i \in I$, la i-ème coordonnée de $\sum_{i \in I} x_i v_i$ est x_i. Ainsi, l'identité :

$$\sum_{i \in I} x_i v_i = 0$$

implique que tous les coefficients x_i sonts nuls. La famille $(v_i)_{i \in I}$ est donc libre. Elle engendre l'espace des solutions de E. C'est donc une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ formé des solutions de E.

Exercice Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions du système d'équations linéaires homogènes à coefficients réels :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 0 & (E_1) \\ x_1+x_2+2x_3+18x_4 &=& 0 & (E_2) \end{array}\right. \quad .$$

Solution Les variables sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement. Les deux équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) est donc ordonné. Faisons tourner l'algorithme de triangulation. Le systéme (E) a mêmes solutions que le système :

$$(E')\quad \left\{\begin{array}{rcll} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 0 & (E_1) \\ x_3+17x_4 &=& 0 & (E_2'=E_2-E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Ce système est triangulé car $1 = v(E_1) < v(E_2') = 3$. Les variables libres de (E') sont donc x_2 et x_4. Résolvons (E'). La dernière équation donne : $x_3 = -17x_4$. En remplaçant dans la première, on obtient : $x_1 = -x_2 + 16x_4$. Ainsi, nous obtenons l'ensemble F des solutions de (E) :

$$\begin{array}{rcl} F &=& \{(-x_2+16x_4, x_2, -17x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ &=& \{x_2(-1,1,0,0) + x_4(16,0,-17,1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \end{array} \quad .$$

Ainsi, $F = \mathrm{vect}((-1,1,0,0),(16,0,-17,1))$. La famille $((-1,1,0,0),(16,0,-17,1))$ est libre. En effet, si

$$x_2(-1,1,0,0) + x_4(16,0,-17,1) = (-x_2+16x_4, x_2, -17x_4, x_4) = 0 \quad ,$$

c'est que $x_2 = x_4 = 0$. La famille $(-1,1,0,0),(16,0,-17,1)$ génératrice de F et libre est donc une base de F.

4.5 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Dans cette sous-section, E désignera un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit $u \in E$, par définition d'une base de E, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Montrons que cette famille de scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ est unique. Pour ce faire, soit $\lambda_1', \ldots \lambda_n'$ une deuxième famille de scalaires telle que $u = \lambda_1' e_1 + \cdots + \lambda_n' e_n$. Par différence, on obtient :

$$(\lambda_1 - \lambda_1')e_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n')e_p = 0 \quad .$$

Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre, il en résulte : $\lambda_1 = \lambda_1'$, ..., $\lambda_n = \lambda_n'$. D'où l'unicité de la décomposition de u comme combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On peut donc donner la définition :

Définition 4.5.1 *(coordonnées d'un vecteur dans une base) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un* **K***-espace-vectoriel E. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ s'appellent les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Le scalaire x_i est appelé la i-ème coordonnée de u dans la base $\mathcal{B}$.*

Si E possède une base $\mathcal{B}$ de n éléments, notons que deux vecteurs de E sont égaux si et seulement si leurs n coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont égales : "une identité vectorielle équivaut à n égalités scalaires".

Proposition 4.5.2 *Soit $u, v \in E$, $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $u + v$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et λu a pour coordonnées $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Preuve : Par définition des x_i et y_i : $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$.
Il en résulte que $u+v = (x_1+y_1)e_1 + \cdots + (x_n+y_n)e_n$. Ainsi $u+v$ a bien pour cordonnées $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. De même, $\lambda u = (\lambda x_1)e_1 + \cdots + (\lambda x_n)e_n$. Et λu a bien pour coordonnées $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, on observe que :

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

Ainsi, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. C'est le seul exemple ou un vecteur ne diffère pas de ses coordonnées ...

4.6 Dimension d'un K-espace vectoriel

Proposition 4.6.1 *Soit E un* **K***-espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute famille de plus de $n + 1$ vecteurs de E est liée.*

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base de E dont on suppose l'existence. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que toute famille $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E est liée. Désignons par $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Nous devons montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$(*) \quad a_1u_1 + \cdots + a_ju_j + \cdots + a_{n+1}u_{n+1} = 0 \quad .$$

Suivant la proposition **??**, les coordonnées de $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_{n+1}u_{n+1}$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} + \cdots + a_{n+1} \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, l'égalité $*$ équivaut à l'égalité :

$$(**) \quad \left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}a_1 + \cdots + a_{1,j}a_j + \cdots + a_{1,n+1}a_{n+1} & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}a_1 + \cdots + a_{n,j}a_j + \cdots + a_{n,n+1}a_{n+1} & = & 0 \quad . \end{array} \right.$$

Ainsi, nous devons montrer que le système de n équations homogènes de $n+1$ variables :

$$(***) \quad \left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n+1}x_{n+1} & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,n+1}x_{n+1} & = & 0 \quad . \end{array} \right.$$

admet une solution distincte de $(0, \ldots, 0)$. Suivant l'algorithme de résolution, $***$ a même solution q'un système triangulé de $m < n+1$ équations linéaires homogènes à n variables. Ce système admet donc au moins une variable libre et donc a plus d'une solution et même une infinité puisque les corps K que nous considérons ont un nombre infini d'éléments.

Théorème 4.6.2 *(définition de la dimension) Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute base de E a n éléments. Cet entier n, noté $\dim_{\mathbf{K}} E$, est appelé la dimension de E.*

Preuve : Sinon, E admettrait une famille libre ayant un nombre d'éléments strictement plus grand que celui d'une base de E.

Proposition 4.6.3 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel non réduit à zéro admettant une famille génératrice. Alors, on peut extraire de cette famille génératrice une base de E.*

Preuve : Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ cette famille génératrice.

Cas $p = 1$: Le vecteur v_1 engendre E. Comme E est non réduit à zéro, le vecteur v_1 n'est pas nul. La famille réduite à l'élément v_1 est donc libre. C'est donc une base de E.

Cas $p > 1$: Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre, puisqu'elle est supposée génératrice, c'est une base de E. Sinon, il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_p v_p = 0 \quad .$$

Quitte à renuméroter la famille, on peut supposer que a_1 est non nul. On en déduit :

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \cdots - \frac{a_p}{a_1} v_p \quad .$$

Par hypothèse, tout vecteur u de E s'écrit :

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \quad ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$. D'où :

$$u = (\lambda_2 - \lambda_1 \frac{a_2}{a_1}) v_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_1 \frac{a_p}{a_1}) v_p \quad .$$

Ainsi, la famille $(v_2, \ldots, v_p)$ est génératrice. En itérant ce procédé, on obtient une base de E extraite de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$.

Proposition 4.6.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de dimension n. Alors toute famille libre peut être completée en une base.*

Preuve : Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E. On sait alors que $p \leq n$ (proposition **??**). Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice, c'est une base de E. Sinon, il existe $v_{p+1} \in E$ non combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$. Considérons une relation :

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + a_{p+1} v_{p+1} = 0 \quad .$$

où $a_i \in \mathbf{K}$. Alors $a_{p+1} = 0$, sinon :

$$v_{p+1} = -\frac{a_1}{a_{p+1}} v_1 - \cdots - \frac{a_p}{a_{p+1}} v_p \quad .$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur v_{p+1}. Il en résulte :

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \quad .$$

Mais alors, puisque la famille de départ $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre, tous les a_i sont nuls. On a ainsi montré que la famille $(v_1, \ldots, v_{p+1})$ est libre et que l'on pouvait donc compléter la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ en une famille libre $(v_1, \ldots, v_{p+1})$. En itérant ce procédé et en moins de $\dim_{\mathbf{K}} E - p$ étapes, nous complétons $(v_1, \ldots, v_p)$ en une base de E. On fabriquerait sinon une famille libre de E ayant $\dim_{\mathbf{K}} E + 1$ éléments.

Corollaire 4.6.5 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de dimension n. Alors ;*

- *Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E,*
- *Une famille génératrice de E formée de n vecteurs est une base de E.*

Preuve : Sinon, on pourrait suivant les propositions **??** et **??** construire deux bases n'ayant pas le même nombre d'éléments.

Définition 4.6.6 *(droite vectorielle, plan, hyperplan) Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel. Un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Proposition 4.6.7 *Soit* $(f_1, \ldots, f_p)$ *une famille génératrice et* $(e_1, \ldots, e_m)$ *une famille libre d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E*. Alors, on peut compléter la famille* $(e_1, \ldots, e_m)$ *par des vecteurs de* $(f_1, \ldots, f_p)$ *pour obtenir une base de* E*.*

Preuve Si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base de E, il n'y a rien a compléter. Sinon, $(e_1, \ldots, e_m)$ n'est pas une famille génératrice. L'un des f_i n'est alors pas dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$. Sinon $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ serait un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$ et on aurait alors $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$: contradiction ! Soit alors i_1 tel que f_{i_1} n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$. Soit $a_1, \ldots, a_{m+1} \in \mathbf{K}$ et une relation :

$$a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m + a_{m+1} f_{i_1} = 0 \quad .$$

Si a_{m+1} est non nul, on aurait $f_{i_1} = -(1/a_{m+1})(a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m)$, ce qui contredit l'hypothèse sur f_{i_1}. Donc, $a_{m+1} = 0$ et la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ étant libre, on en déduit que tous les a_i sont nuls. La famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1})$ est donc libre. Si c'est une famille génératrice de E, c'est une base de E et nous avons terminé. Sinon, continuons.

Supposons la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ libre. Les f_{i_j} sont alors deux à deux dictincts, car une famille libre ne contient pas deux vecteurs égaux. Si $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ est génératrice, c'est une base de E. Sinon, par le même argument que précédemment, il existe $i_{r+1} \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_{i_{r+1}} \notin (e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$. On montre alors comme précedemment que la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ est libre.

En moins de p étapes, on obtient une base de E, car la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_p)$ est une famille génératrice de E.

4.7 Décider si une famille de vecteurs est une base

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Question : la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est-elle une base de E ?

Cas $p \neq n$: Comme toute base de E a n éléments, $(u_1, \ldots, u_p)$ n'est pas une base de E.

Cas $p = n$: Notons $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$u_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n \quad .$$

D'après le corollaire **??**, $(u_1, \ldots, u_n)$ sera une base de E si et seulement c'est une famille libre.

Suivant la proposition **??**, les coordonnées de $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_1 + \cdots + a_{1,j}a_j + \cdots + a_{1,n}a_n \\ \vdots \\ a_{n,1}a_1 + \cdots + a_{n,j}a_j + \cdots + a_{n,n}a_n \end{pmatrix} \quad .$$

Réponse : Ainsi, $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si le système

$$(*) \quad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

admet $(0, \ldots, 0)$ comme seule solution.

Ainsi, pour montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, il suffit de résoudre le système $*$, par exemple en suivant l'algorithme donné au chapître 3.

Notons $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice carrée dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est donc la matrice carrée de terme général $(a_{i,j})$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad .$$

D'après le lemme 3.7.3 du chapître 4, le système $*$ admet $(0,\ldots,0)$ comme seule solution si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_n)$ qui est la matrice associée à ce système est inversible.
Ainsi, on peut aussi répondre à la question de la façon suivante :

Autre réponse : Pour montrer que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de E, il suffit d'étudier l'inversibilité de $M_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_n)$. Le seul calcul du déterminant de cette matrice suffit pour conclure. En dimension grande, on peut aussi utiliser l'algorithme donné au chapître 4.

Résumons une partie de cette étude en une proposition :

Proposition 4.7.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de dimension n. Une famille $(u_1,\ldots,u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si la matrice carrée $M_{\mathcal{B}}(u_1,\ldots,u_n)$ dont les colonnes sont les coordonnées dans une base de E est inversible.*

Exercice : Soit E un $\mathbf{R}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$. Considérons les vecteurs $u_1=e_1+2e_2$ et $u_2=e_1+3e_2$. Montrer que la famille (u_1,u_2) est une base de E.

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} E=2$, il suffit de montrer que la famille (u_1,u_2) est libre (voir corollaire **??**). Soit $a,b\in\mathbf{K}$ tels que $au_1+bu_2=0$. Les coordonnées de au_1+bu_2 dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\2a+3b\end{pmatrix}$$

Ainsi, $au_1+bu_2=0$ équivaut au système d'équations lináires homog‘enes :

$$(*)\qquad\left[\begin{array}{rcll}a+b&=&0&(E_1)\\2a+3b&=&0&(E_2)\end{array}\right.\quad,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**)\qquad\left[\begin{array}{rcll}a+b&=&0&(E_1)\\b&=&0&(E_2-2E_1)\end{array}\right.\quad,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base E.

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de u_1, u_2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (u_1, u_2) est une base de E.

Exercice (variante) : Soit les vecteurs $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$ de $\mathbf{R}^2$. Montrer que la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

A un détail près, il s'agit du même exercice que le précédent. En effet, dire que $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$, c'est dire que dans la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbf{R}^2$, les coordonnées de v_1 et v_2 sont respectivement $(1, 4)$ et $v(1, 5)$.

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2 = 2$, il suffit de montrer que la famille (v_1, v_2) est libre (voir corollaire **??**). Soit $a, b \in \mathbf{K}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. En colonne :

$$av_1 + bv_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 4a + 5b \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $av_1 + bv_2 = 0$ équivaut au système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcll} a + b & = & 0 & (E_1) \\ 4a + 5b & = & 0 & (E_2) \end{array} \right. \quad ,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**) \quad \left[\begin{array}{rcll} a + b & = & 0 & (E_1) \\ b & = & 0 & (E_2 - 4E_1) \end{array} \right. \quad ,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (v_1, v_2) est libre. C'est donc une base E.

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$M(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (v_1, v_2) est une base de E.

4.8 Coordonnées d'un même vecteur dans des bases différentes

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Donnons nous une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ et supposons connues les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$e'_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n \quad .$$

Définition 4.8.1 *(matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel E. Appelons matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P = M_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.*

$$P = M_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons vu à la proposition **??** que la matrice P est inversible.

Question facile : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$, quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?

Suivant la proposition **??**, les coordonnées de $u = X_1 e'_1 + \cdot + X_n e'_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$X_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + X_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + X_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,j}X_j + \cdots + a_{1,n}X_n \\ \vdots \\ a_{n,1}X_1 + \cdots + a_{n,j}X_j + \cdots + a_{n,n}X_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad .$$

Question plus calculatoire : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$?

Méthode 1 : D'après la question précédente, les coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont l'unique solution du sysème de n équations linéaires :

$$\left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,j}X_j + \cdots + a_{1,n}X_n & = & x_1 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}X_1 + \cdots + a_{n,j}X_j + \cdots + a_{n,n}X_n & = & x_n \quad . \end{array} \right.$$

Il suffit de résoudre le système $*$, par exemple en suivant l'algorithme donné au chapître 3.

Méthode 2 : D'après la question précédente, comme la matrice P est inversible, les coordonnées $(X_1, \dots, X_n)$ de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Il reste à calculer P^{-1}, ce qu'on peut faire en utilisant les méthodes ou l'algorithme donnés au chapître 4.

En particulier, si on prend $u = e_j$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ où le 1 est placé à la j-ème place. Ainsi, les coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où 1 est sur la ligne j}$$

qui n'est autre que la j-ème colonne de P^{-1}. Ainsi, P^{-1} n'est autre que la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}'$:

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}\left(e_1, \ldots, e_n\right) \quad .$$

Résumons une partie de cette étude en une proposition :

Proposition 4.8.2 *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace-vectoriel E de dimension n. Désignons par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit u un vecteur de coordonnées $(x_1, \ldots x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et soit $(X_1, \ldots X_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice, P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exercice : Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit $e'_1 = e_1 + 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + 3e_2$, nous avons vu que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $e_1 + e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$, même question avec e_1, e_2. Soit $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, quelles sont les coordonnées du vecteur $x_1e_1+x_2e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$?

Méthode 1 (sans matrice de changement de base) : Soit (X_1, X_2) les coordonnées de $e_1 + e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$. En passant aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonne, l'égalité $X_1 e'_1 + X_2 e'_2 = e_1 + e_2$ donne l'égalité matricielle :

$$X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 3X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Résolvons ce système, on obtient : $(X_1, X_2) = (2, -1)$.

Pour les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}'$, on trouve $(3, -2)$ et pour celles de e_2, on trouve $(-1, 1)$. Ainsi, $e_1 = 3e'_1 - 2e'_2$ et $e_2 = -e'_1 + e'_2$.

Cherchons maintenant les coordonnées de $xe_1 + ye_2$ dans la base $\mathcal{B}'$. En passant aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonne, l'égalité $X_1 e'_1 + X_2 e'_2 = x_1 e_1 + x_2 e_2$ donne l'égalité matricielle :

$$X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 3X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette équation matricielle équivaut au système d'équations linéaires :

$$\left[\begin{array}{rcl} X_1 + X_2 & = & x_1 \\ 2X_1 + 3X_2 & = & x_2 \end{array} \right. \quad .$$

Résolvons ce système, il est équivalent au système triangulé :

$$\left[\begin{array}{rcl} X_1 + X_2 & = & x_1 \\ X_2 & = & -2x_1 + x_2 \end{array} \right. \quad .$$

Il vient : $X_2 = -2x_1 + x_2$ et $X_1 = x_1 - X_2 = 3x_1 - x_2$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Méthode 2 (avec matrice de changement de base) : La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse s'obtient suivant la chapître 4 en calculant le déterminant et la comatrice de P. On Obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

En prenant, $(x_1, x_2) = (1, 1)$, on retrouve que $(2, -1)$ sont les coordonnées de $e_1 + e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$. Le couple $(-3, 2)$ obtenue à partir de la première colonne de P^{-1} sont les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}'$. Le couple $(-1, 1)$ obtenue à partir de la deuxième colonne de P^{-1} sont les coordonnées de e_2 dans la base $\mathcal{B}'$.

Méthode 3 : Par hypothèse :

$$\left[\begin{array}{rcl} e_1 + 2e_2 & = & e'_1 \\ e_1 + 3e_2 & = & e'_2 \end{array} \right. \quad .$$

Cherchons à exprimer (e_1, e_2) à l'aide de (e'_1, e'_2). Le système précédent peut être vu comme un système d'équations linéaires à inconnues vectorielles. Résolvons le comme un système d'équations linéaires, il est équivalent au système "triangulé" :

$$\left[\begin{array}{rcl} e_1 + 2e_2 & = & e'_1 \\ e_2 & = & e'_2 - e'_1 \end{array} \right. \quad .$$

On obtient, $e_2 = -e'_1 + e'_2$, puis $e_1 = e'_1 - 2(-e'_1 + e'_2) = 3e'_1 - 2e'_2$. Ainsi les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$ sont respectivement $(3, -2)$ et $(-1, 1)$. Les coordonnées de $x_1e_1 + x_2e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$ en colonnes sont

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$