5 Sous-espaces vectoriels

5.1 Introduction

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, nous commençons par observer que tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension inférieure ou égale à n et que si $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E$, c'est que $F = E$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, autrement dit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. A partir de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}$, nous donnons un algorithme pour calculer la dimension de F appelée aussi rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Cet algorithme construit en fait une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $*$ un système de m équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$. On peut observer facilement que le sous-ensemble de E formé des vecteurs dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions de $*$ est un sous-espace vectoriel E. Nous montrons inversement que tout sous-espace vectoriel F de E est en fait formé des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les solutions d'un système de $\dim_{\mathbf{K}} E - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes de n variables. On appelera un tel système un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$. Si F est engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, nous montrons comment déterminer un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$.

Si F est donné par un système de générateurs, il est facile de déterminer des vecteurs de F. Ils sont en effet "paramétrés" par la famille génératrice. Par contre, si F est donné par un système d'équations, il est facile de vérifier si un vecteur de E est dans F. L'idéal est donc de disposer à la fois d'un système de générateurs d'un sous-espace vectoriel et d'un système d'équations. Les algorithmes du chapître 3 et de ce chapître permettent justement de passer d'une présentation à l'autre.

La somme de deus sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E est l'ensemble des sommes des vecteurs de F et des vecteurs de G. C'est un espace vectoriel noté $F+G$. Nous montrons la formule :

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

La somme $F+G$ est dite directe si $F \cap G = \{0\}$. Tout vecteur de $F+G$ se décompose alors de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G. On dit que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si $E = F \oplus G$. Dans ce cas, tout vecteur de E se décompose de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Objectif Soit E et un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

- Savoir déterminer à l'aide de $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ une base échelonnée de $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et donc le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.
- Savoir déterminer à l'aide d'une base échelonnée de F un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Savoir montrer en petite dimension que deux sous-espaces vectoriels sot supplémentaires. Dans ce cas, savoir préciser la décomposition d'un vecteur de E en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

5.2 Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 5.2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel non réduit à zéro d'un K-espace vectoriel E de dimension n. Alors, F admet une base et* $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq n$.

Preuve : Observons les deux points suivants.
1) Soit u un vecteur non nul de F. La famille (u) réduite au seul vecteur u est alors libre.
2) Supposons construit une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de F qui ne soit pas une base de F. Soit alors, $u_{p+1} \in F$ tel que u_{p+1} ne soit pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$. Il en résulte (voir preuve de la proposition 4.6.4 du chapître sur les espaces vectoriels) que la famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est une famille libre de

vecteurs de F.
Suivant ces deux remarques, si F n'admettait pas de base, on construirait une famille libre de vecteurs de F (donc de E) de strictement plus de n vecteurs. C'est impossible, car toute famille de strictement plus de n vecteurs de E est liée.

Ainsi F admet une base. Cette base est une famille libre de vecteurs de F donc de E. Elle a donc moins de n éléments et $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq n$.

Proposition 5.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F) = \dim_{\mathbf{K}}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad F = E \quad .$$

Preuve : Supposons $\dim_{\mathbf{K}}(F) = n$. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de F formé de n vecteurs. $\mathcal{B}$ est donc en particulier une famille libre de n vecteurs de E qui est supposé de dimension n. C'est donc une base de E. Ainsi, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc de F. Ainsi, $E \subset F$ et $E = F$.

Corollaire 5.2.3 *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{K}}(E_1) = \dim_{\mathbf{K}}(E_2) \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 = E_2 \quad .$$

Preuve : Résulte directement de la proposition **??**, puisque si $E_1 \subset E_2$, E_1 est un sous-espace vectoriel de E_2.

Soit maintenant E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Le sous-espace $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est par définition engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Suivant la proposition 4.6.3, on peut donc extraire de cette famille génératrice une base de F.

Définition 5.2.4 *E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. On appelle rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ l'entier :*

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim_{\mathbf{K}} Vect(u_1, \ldots, u_p) \leq p \quad .$$

Remarque 5.2.5 E un **K**-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p &\iff (u_1, \dots, u_p) \text{ base de } Vect(u_1, \dots, u_p) \\ &\iff (u_1, \dots, u_p) \text{ famille libre } \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Posons $F = Vect(u_1, \dots, u_p)$.
Comme F est par définition engendré par $u_1, \dots, u_p$, les assertions $(u_1, \dots, u_p)$ base de F et $(u_1, \dots, u_p)$ famille libre sont équivalentes.
Si le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est p, c'est que F est de dimension p. Ainsi $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de F ayant le même nombre d'éléments qu'une base de F, c'est donc une base de F.
Inversement si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F, c'est que p est la dimension de F et donc $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.

Remarque 5.2.6 E un **K**-espace vectoriel de dimension n et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = n &\iff Vect(u_1, \dots, u_p) = E \\ &\iff (u_1, \dots, u_p) \text{ famille génératrice de } E \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Si $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$, c'est que $Vect(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Il résulte de la proposition **??** que $Vect(u_1, \dots, u_p) = E$. Les autres assertions sont évidentes.

Remarque 5.2.7 E un **K**-espace vectoriel de dimension n et n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de E.

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = n \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \quad .$$

Preuve : Cette remarque résulte par exemple des remarques **??** et **??**.

5.3 Algorithme pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel E. Nous supposerons E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons F donné par un système de générateurs dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont connues. On se propose de donner un algorithme qui fournira une base de F. En particulier, cette algorithme donnera le **rang** d'une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et une **base** du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de cette famille.

L'algorithme sera une nouvelle fois très semblable à l'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires ou d'échelonnage d'une matrice. On procédera cette fois çi sur la matrice dont les colonnes seront les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs du système de générateurs de F et on jouera avce ses colonnes.

Si $u_1, \dots, u_n$ sont n vecteurs de E donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. On a vu que $(u_1, \dots, u_n)$ base de E équivaut $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$. Notre nouvel algorithme donne ainsi une méthode supplémentaire pour décider si n vecteurs donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est une base de E.

Notation 5.3.1 *Soit* $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ *une matrice colonne non nulle. On appelle ordre de c l'entier $v(c) = \inf\{i\ ;\ c_i \neq 0\}$. Soit u un vecteur non nul de E de coordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous appellerons ordre de u relativement à la base $\mathcal{B}$ et noterons* $v_{\mathcal{B}}(u) = \inf\{i \in \{1, \dots, n\},\ \text{tel que } a_i \neq 0\}$. *On dira qu'une famille $u_1, \dots, u_p$ de vecteurs non nuls de E est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ si $v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) < \cdots < v_{\mathcal{B}}(u_p)$.*

S'il n'y a pas d'ambiguité sur la base $\mathcal{B}$, on écrira plus simplement $v_{\mathcal{B}}(u) = v(u)$.

L'ordre de u relativement à la base $\mathcal{B}$ n'est autre que l'ordre de la matrice colonne constituée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Lemme 5.3.2 *Une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ est une famille libre.*

Preuve : Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soit $\lambda_i \in \mathbf{K}$, tel que :

$$(*) \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \quad .$$

Notons k l'ordre de u_1 dans la base $\mathcal{B}$ et $a_{1,k} \neq 0$ la k-ième coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$, la k-ième coordonnée de $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda_1 a_{1,k}$. Il résulte de l'égalité $*$ que $\lambda_1 a_{1,k} = 0$. D'où, $\lambda_1 = 0$. Itérons, nous obtenons que tous les λ_i sont nuls et la liberté de la famille $u_1, \ldots, u_p$.

Lemme 5.3.3 *(Lemme d'échange) Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p \in E$ et $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ la famille de E déduite de $u_1, \ldots, u_p$ par une succession d'opérations suivantes : permutation de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul ou soustraction à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres. Alors, nous avons :*

a) $\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$,

b) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ famille libre $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ famille libre ,

c) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ base de E $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ base de$E$.

Preuve : Nous allons montrer le lemme dans le cas :

$$u'_1 = u_1\ ,\ u'_2 = u_2\ , \ldots\ ,\ u'_{p-1} = u_{p-1}\ ,\ u'_p = u_p - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \cdots - \gamma_{p-1} u_{p-1} \quad .$$

Montrons a). Si $u \in \mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p \quad .$$

Il en résulte :

$$u = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p-1} u_{p-1} + \lambda_p (u_p - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \cdots - \gamma_{p-1} u_{p-1})\ .$$

On en déduit :

$$u = (\lambda_1 - \lambda_p \gamma_1) u_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p \gamma_{p-1}) u_{p-1} + \lambda_p u_p\ .$$

Donc, $u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Cela montre l'inclusion :

$$\mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p) \subset \mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad .$$

Mais, on a également :

$$u_1 = u'_1 \ , \ \ldots \ , \ u_{p-1} = u'_{p-1}, u_p = u'_p + \gamma_1 u'_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u'_{p-1} \quad .$$

On obtient par la raisonnement précédent l'autre inclusion et l'identité atendue :

$$\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p) \quad .$$

Montrons b) Supposons la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = 0 \quad .$$

D'où , $\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = (\lambda_1 - \gamma_1 \lambda_p) u_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \gamma_{p-1} \lambda_p) u_{p-1} + \lambda_p u_p = 0$. Comme la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre, on en déduit : $\lambda_1 - \gamma_1 \lambda_p = \cdots = \lambda_{p-1} - \gamma_{p-1} \lambda_p = \lambda_p = 0$. Il en résulte : $\lambda_p = \lambda_{p-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$. La famille $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ est donc libre. La réciproque se montre de même en utilisant l'expression de $u_1 \ldots, u_p$ à l'aide des u'_i.
Montrons c) Cela se déduit de a) et b), puisque $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ base de E équivaut à $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ famille libre et $\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = E$.

Notons également que si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, elle reste génératrice et si on enlève les vecteurs nuls d'une famille génératrice, elle reste génératrice.

Algorithme donnant une base d'un sous-espace vectoriel

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Désignons par $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

Détaillons l'algorithme qui précisera à partir de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Étape 1 : Quitte à enlever les vecteurs nuls de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ou à permuter ces vecteurs, on peut supposer les u_i sont non nuls et $v(u_1) \leq v(u_2) \leq \cdots \leq v(u_p)$.

Étape 2 : Posons $d = v(u_1)$. Les $d-1$ premières lignes de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ sont alors nulles. Notons $a_{d,i}$ la d-ème coordonnée de u_i dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de $v(u_1)$, $a_{d,1}$ est non nul. On peut poser :

$$u_1^{(2)} = u_1 \ , \ u_1^{(2)} = u_2 - \frac{a_{d,2}}{a_{d,1}} u_1 \ , \ \ldots \ , \ u_p^{(2)} = u_p - \frac{a_{d,p}}{a_{d,1}} u_1 \quad .$$

D'après le lemme **??**, on a toujours : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$. La premiére colonne de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ est la même que la première colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et pour $j \geq 2$, la j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ est la différence de la j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et de $a_{d,j}/a_{d,1}$ fois sa première colonne. Par définition des $a_{d,i}$, on obtient que pour $j \geq 2$: $v(u_j^{(2)}) > d$. Ainsi, quitte à supprimer les vecteurs nuls de la famille $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ et à permuter ces vecteurs, on peut supposer :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_{p_2}^{(2)}) \quad \text{et} \quad d = v(u_1^{(2)}) < v(u_2^{(2)}) \leq v(u_3^{(2)}) \leq \cdots \leq v(u_{p_2}^{(2)}) \ ,$$

où p_2 est un entier inférieur ou égal à p.

Étape k : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_{p_k}^{(k)})$ où $p_k \leq p_{k-1}$ et $v(u_1^{(k)}) < \cdots < v(u_k^{(k)}) \leq v(u_{k+1}^{(k)}) \leq \cdots \leq v(u_{p_k}^{(k)})$. De plus, les $u_j^{(k)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_{p_k}^{(k)}) = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(k)} & \ldots & a_{1,p(k)}^{(k)} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1}^{(k)} & \ldots & a_{n,p(k)}^{(k)} \end{pmatrix} \quad .$$

Passage à l'étape suivante : Utilisons $u_k^{(k)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs $u_{k+1}^{(k)}, \dots u_{p_k}^{(k)}$. Posons $d = v(u_k^{(k)})$ et $a_{d,k}^{(k)}$ la d-ème coordonnée de $u_k^{(k)}$ dans la base $\mathcal{B}$. Notons :

$$u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} \quad , \dots , \quad u_k^{(k+1)} = u_k^{(k)} \quad , \quad u_{k+1}^{(k+1)} = u_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{d,k+1}^{(k)}}{a_{d,k}^{(k)}} u_k^{(k)} \quad , \dots , \quad u_{p_k}^{(k+1)} = u_{p_k}^{(k)} - \frac{a_{d,p_k}^{(k)}}{a_{d,k}^{(k)}} u_k^{(k)} \quad .$$

On a $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, \dots , u_{p_k}^{(k+1)})$. Il reste à enlever les vecteurs $u_j^{(k+1)}$ qui sont non nuls et à ordonner la famille obtenue. On obtient :

Étape k+1 : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, \dots , u_{p_{k+1}}^{(k+1)})$ où $v(u_1^{(k+1)}) < \dots < v(u_{k+1}^{(k+1)}) \leq v(u_{k+2}^{(k+1)}) \leq \dots \leq v(u_{p_{k+1}}^{(k+1)})$ et $p_{k+1} \leq p_k$. De plus par définition, les $u_j^{(k+1)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots , u_p$.

Ainsi, en moins de n étapes, on arrive à : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(l)}, u_2^{(k)}, \dots , u_{p_l}^{(l)})$ où la famille $u_1^{(l)}, \dots , u_{p_l}^{(l)}$ est une famille de p_l vecteurs échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ et où les $u_j^{(l)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots , u_p$. D'après le lemme **??**, la famille $(u_1^{(l)}, \dots , u_{p_l}^{(l)})$ est donc libre. Elle engendre F. C'est donc une base de F. En particulier $\dim_{\mathbf{K}} F = \mathrm{rg}(u_1, \dots , u_p) = p_l$.

Si $p_l < p$, la famille $(u_1, u_2, \dots , u_p)$ n'est pas libre et l'algorithme donne $p - p_l$ combinaisons linéaires non triviales des $u_1, u_2, \dots , u_p$ égales au vecteur nul.

Suivant la remarque **??**, $p_l = p$ équivaut à $(u_1, \dots , u_p)$ famille libre ou encore $(u_1, \dots , u_p)$ base de F.

Exemple 1 : Notons $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \quad .$$

Soit $u_1 = (2, 1, 0), u_2 = (-1, 2, 1), u_3 = (3, 4, 1), u_4 = (0, 5, 2)$. Notons F le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de E. Puisque (a, b, c) sont les coordonnées de (a, b, c) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on a d'une part :

$v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) < v(u_4)$. D'autre part, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) \quad .$$

Étape 2 : On utilise u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1',u_2',u_3',u_4') = \begin{pmatrix} u_1' = u_1 & u_2' = u_2 + (1/2)u_1 & u_3' = u_3 - (3/2)u_1 & u_4' = u_4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1',u_2',u_3',u_4') \; .$$

On a $v(u_1') < v(u_2') = v(u_3') = v(u_4')$.

Étape 3 : On utilise u_2' pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'',u_2'',u_3'',u_4'') = \begin{pmatrix} u_1'' = u_1' & u_2'' = u_2' & u_3'' = u_3' - u_2' & u_4'' = u_4' - 2u_2' \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1'',u_2'',u_3'',u_4'') \; .$$

On a $v(u_1'') < v(u_2'')$ et $u_3'' = u_4'' = 0$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'',u_2'') = \begin{pmatrix} u_1'' = u_1' & u_2'' = u_2' \\ 2 & 0 \\ 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1'',u_2'') \; .$$

L'algorithme est terminé et la famille $(u_1'' = 2e_1 + e_2 = (2,1,0), u_2'' = (5/2)e_2 + e_3 = (0,5/2,1))$ est donc une base de F échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Remarquons que :

$$
\begin{array}{ccccccc}
(2,1,0) & = & u_1'' & = & u_1' & = & u_1 \\
(0,5/2,1) & = & u_2'' & = & u_2' & = & u_2+(1/2)u_1 \\
0 & = & u_3'' & = & u_3'-u_2' = u_3-(3/2)u_1-(u_2+(1/2)u_1) & = & u_3-u_2-2u_1 \\
0 & = & u_4'' & = & u_4'-2u_2' = u_4-2(u_2+(1/2)u_1) & = & u_4-2u_2-u_1
\end{array}
$$

En conclusion, l'algorithme nous permet d'affirmer que $((2,1,0)=u_1,(0,5/2,1)=u_2+(1/2)u_1)$ est une base de F. Il donne les relations $0=u_3-u_2-2u_1$ et $0=u_4-2u_2-u_1$ entre les vecteurs u_1,u_2,u_3,u_4.

Exemple 2 : Considérons E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$une base de E. Soit $u_1=e_1-e_2+e_4, u_2=2e_1+e_2+4e_3+5e_4, u_3=e_1+2e_2-4e_3-2e_4, u_4=2e_1-3e_2+4e_3+5e_4, u_5=e_1+e_2+e_4$. Notons F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ de E. On a : $v(u_1)=v(u_2)=v(u_3)=v(u_4)=v(u_5)$.

$$
M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) \quad .
$$

Étape 2 : On utilise u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$
M_{\mathcal{B}}(u_1',u_2',u_3',u_4',u_5')=\begin{pmatrix} u_1'=u_1 & u_2'=u_2-2u_1 & u_3'=u_3-u_1 & u_4'=u_4-2u_1 & u_5'=u_5-u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad .
$$

$F=\mathrm{Vect}(u_1',u_2',u_3',u_4',u_5')$.

Permutons les vecteurs u_i' pour simplifier le passage à l'étape suivante en posant :

$$
u_1^{(1)}=u_1' \ , \ u_2^{(1)}=u_5' \ , \ u_3^{(1)}=u_2' \ , \ u_4^{(1)}=u_3' \ , \ u_5^{(1)}=u_4'
$$

On a toujours $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}, u_5^{(1)})$ et on a : $v(u_1^{(1)}) < v(u_2^{(1)}) \leq v(u_3^{(1)}) \leq v(u_4^{(1)}) \leq v(u_5^{(1)})$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}, u_5^{(1)}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)} & u_5^{(1)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 3 : On utilise $u_2^{(1)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants : la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}, u_5^{(2)})$ est :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1^{(2)} = u_1^{(1)} & u_2^{(2)} = u_2^{(1)} & u_3^{(2)} = u_3^{(1)} - (3/2)u_2^{(1)} & u_4^{(2)} = u_4^{(1)} - (3/2)u_2^{(1)} & u_5^{(1)} = u_5^{(1)} + (1/2)u_2^{(1)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}, u_5^{(2)})$ et on a : $v(u_1^{(1)}) < v(u_2^{(1)}) < v(u_3^{(1)}) \leq v(u_4^{(1)}) \leq v(u_5^{(1)})$.

Étape 4 : On utilise $u_3^{(2)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, u_4^{(3)}, u_5^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1^{(3)} = u_1^{(2)} & u_2^{(3)} = u_2^{(2)} & u_3^{(3)} = u_3^{(2)} & u_4^{(3)} = u_4^{(2)} + u_3^{(2)} & u_5^{(3)} = u_5^{(2)} - u_3^{(2)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, u_4^{(3)}, u_5^{(3)})$ et on a : $v(u_1^{(3)}) < v(u_2^{(3)}) < v(u_3^{(3)})$ et $u_4^{(3)} = u_5^{(3)} = 0$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}) = \begin{pmatrix} u_1^{(3)} = u_1^{(2)} & u_2^{(3)} = u_2^{(2)} & u_3^{(3)} = u_3^{(2)} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)})$ et on a : $v(u_1^{(3)}) < v(u_2^{(3)}) < v(u_3^{(3)})$.

L'algorithme est terminé et $(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)})$ est une base de F. Ainsi,

$$(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}) = (e_1 - e_2 + e_4, 2e_2, 4e_3 + 3e_4)$$

est une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. En particulier, la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est de rang 3.

En suivant chaque étape de l'algorithme, on obtient l'expression de $u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}$ en fonction de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et deux "relations" non triviales entre u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 :

$u_1^{(1)} = u_1$	$u_1^{(2)} = u_1$	$u_1^{(3)} = u_1$
$u_2^{(1)} = u_5 - u_1$	$u_2^{(2)} = u_5 - u_1$	$u_2^{(3)} = u_5 - u_1$
$u_3^{(1)} = u_2 - 2u_1$	$u_3^{(2)} = u_2 - 2u_1 - (3/2)(u_5 - u_1) = -(1/2)u_1 + u_2 - (3/2)u_5$	$u_3^{(3)} = -(1/2)u_1 + u_2 - (3/2)u_5$
$u_4^{(1)} = u_3 - u_1$	$u_4^{(2)} = u_3 - u_1 - (3/2)(u_5 - u_1) = -(1/2)u_1 + u_3 - (3/2)u_5$	$0 = u_2 + u_3 - 3u_5$
$u_5^{(1)} = u_4 - 2u_1$	$u_5^{(2)} = u_4 - 2u_1 + (1/2)(u_5 - u_1) = -(5/2)u_1 + u_4 + (1/2)u_5$	$0 = -2u_1 + u_4 - u_2 + 2u_5$

On obtient donc :

$$u_1^{(3)} = u_1 \quad , \quad u_2^{(3)} = u_5 - u_1 \quad , \quad u_3^{(3)} = -(1/2)u_1 + u_2 - (3/2)u_5$$

et les relations :

$$u_2 + u_3 - 3u_5 = -2u_1 + u_4 - u_2 + 2u_5 = 0 \quad .$$

5.4 Algorithme pour déterminer les équations d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

On rappelle que si $u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, où les $a_i \in \mathbf{K}$, nous avions noté :

$$v(u) = \inf\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } a_i \neq 0\} \quad .$$

Soit $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ et le système linéaire homogène de m équations linéaires à n inconnues.

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Considérons le sous-ensemble F de E constitué des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions du système $*$. Soit u et v sont dans F et $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit X et Y les les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$. X et Y sont donc des solutions de $*$. Comme les solutions de $*$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$, $X + Y$ et λX sont solutions de $*$. Or, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $u + v$ et λu sont $X + Y$ et λX. Ainsi, $u + v$ et λu sont dans F. Ainsi, F est sous-espace vectoriel de E. Nous dirons que $*$ est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$. Plus généralement, définissons ce qu'est un système d'équations d'un sous-espace vectoriel relativement à une base $\mathcal{B}$.

Définition 5.4.1 *Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ un systéme homogène d'équations linéaires à n variables dont les solutions sont exactement les coordonnées des vecteurs de F.*

Exemple : Soit E un K-espace vectoriel de dimension trois et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
$F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ admet le système homogène :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

comme système d'équations relativement à la base $\mathcal{B}$. En effet, il est clair qu'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à F si et seulement si ses coordonnées sont égales, ce qui se traduit par :

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = 0 \quad .$$

Considérons $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3)$. C'est une autre base de E. Comme F admet la famille réduite au vectteur $e_1 + e_2 + e_3$ comme base, le système d'équations linéaires $x_2 = x_3 = 0$ est système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}'$.
Cet exemple illustre la fait qu'un système d'équations d'un sous-espace vectoriel relativement à une base dépend beaucoup de cette base.

Proposition 5.4.2 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Tout sous-espace vectoriel de E admet un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ formé de $n - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes à n variables.*

Preuve : D'après la proposition **??**, F admet une base. En particulier, il existe $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E où $p \leq n$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Nous préciserons dans ce paragraphe, un algorithme donnant un systéme d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ formé de $n - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes à n variables en fonction de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ce qui établira la proposition.

On peut noter que l'algorithme de triangulation de Gauss ramène tout système d'équations de F dans une base à un système de $n - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes.

Lemme 5.4.3 *Soit $u_1, \dots, u_p \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On suppose $v(u_1) < \cdots < v(u_p)$. Soit $u \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$u \in F \quad \text{et} \quad x_{v(u_1)} = x_{v(u_2)} = \cdots = x_{v(u_p)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \quad .$$

Preuve : $\Longleftarrow$ Clair, puisque qu'un vecteur de E est nul si et seulement ses coordonnées dans une base sont nulles.
$\Longrightarrow$ Comme $u \in F$, il existe $\lambda_1, \dots \lambda_p \in K$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$. La $v(u_1)$-ème coordonnée

de u est $\lambda_1 a_{v(u_1),1}$ où $a_{v(u_1),1} \neq 0$ est la $v(u_1)$-ème coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme $x_{v(u_1)} = 0$, on en déduit $\lambda_1 = 0$. Itérons, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Donc, $u = 0$.

Algorithme donnant un système d'équations d'un sous-espace vectoriel

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Désignons par $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

Détaillons l'algorithme qui précisera à partir de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

En utilisant l'algorithme du paragraphe **??**, on peut supposer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$v(u_1) < v(u_2) \cdots < v(u_p) \quad .$$

Notons $a_{d,i}$ la d-ème coordonnée de u_i dans la base $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Étape 1 : On utilise u_1 pour "annuler" la $v(u_1)$-ème coordonnée de u.
Posons $u^{(1)} = u - \dfrac{x_{v(u_1)}}{a_{v(u_1),1}} u_1$. Par construction, la $v(u_1)$-ème coordonnée de $u^{(1)}$ dans la base $\mathcal{B}$ est nulle. De plus, comme que $u_1 \in F$, on a $u \in F$ si et seulement si $u^{(1)} \in F$. Nous noterons $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ les coordonnées de $u^{(1)}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Étape k : Nous disposons d'un vecteur $u^{(k)}$ de coordonnées $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifiant les deux conditions $x_{v(u_1)}^{(k)} = \cdots = x_{v(u_k)}^{(k)} = 0$ et $u \in F$ si et seulement si $u^{(k)} \in F$.

Pour passer à l'étape suivante, utilisons u_{k+1} pour "annuler" la $v(u_{k+1})$-ème coordonnée de $u^{(k)}$.
Posons pour cela $u^{(k+1)} = u^{(k)} - \dfrac{x_{v(u_{k+1})}^{k}}{a_{v(u_{k+1}),k+1}} u_{k+1}$. Par construction la $v(u_{k+1})$-ème coordonnée de $u^{(k+1)}$ est

nulle. Comme $v(u_{k+1}) > v(u_k)$, les $v(u_1)$, ... , $v(u_k)$-ème coordonnées de $u^{(k+1)}$ restent nulles. Enfin, comme $u_{k+1} \in F$, on a $u^{(k)} \in F$ si et seulement si $u^{(k+1)} \in F$. Ainsi, nous sommes arrivés à l'étape $k+1$.

Étape k+1 : Soit $u^{(k+1)} = u^{(k)} - \dfrac{x^k_{v(u_{k+1}}}{a_{v(u_{k+1}),k+1}} u_{k+1}$ et notons $(x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors, $x^{(k)}_{v(u_1)} = \dots = x^{(k+1)}_{v(u_{k+1})} = 0$ et $u \in F$ si et seulement si $u^{(k+1)} \in F$.

Itérons, nous arrivons à l'étape p.

Étape p : Nous disposons d'un vecteur $u^{(p)}$ de coordonnées $(x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$ dans la base $\mathcal{B}$ satifaisant $x^{(p)}_{v(u_1)} = \dots = x^{(p)}_{v(u_p)} = 0$ et la condition $u \in F$ si et seulement si $u^{(p)} \in F$.

La condition $u \in F$ équivaut donc à $u^{(p)} \in F$. D'après, le lemme **??**, cette condition équivaut à $u^{(p)} = 0$. Ainsi, $u \in F$ si et seulement si $x_j^{(p)} = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\} - \{v(u_1), \dots, v(u_p)\}$. Comme ces $x_j^{(p)}$ dépendent linéairement des coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de u dans la base $\mathcal{B}$, les équations $x_j^{(p)} = 0$ définissent un système de $n-p$ équations linéaires homogènes à n variables. Et $u \in F$ si et seulement si les coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de u sont solutions de ce linéaire homogène.

Ainsi, notre algorithme donne un système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$ constitué de $n-p$ équations linéaires homogènes à n variables où p est la dimension de F.

On peut noter de plus que ce même algorithme donne les coordonnées de tout vecteur de F dans une base échelonnée $(u_1, \dots, u_p)$ de F si ce vecteur est donné par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1 : $E = \mathbf{R}^4$, $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 4, 3)$. Soit $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$. On se propose de donner un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$: $v(u_1) = 1$, $v(u_2) = 2$ et

$v(u_3) = 3$. Soit u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$. .

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 1 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u - x_1 u_1) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(1)} = u - x_1 u_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad u^{(1)} = u - x_1 u_1 \ .$$

On a $u \in F$ équivaut à $u^{(1)} \in F$.

Étape 2 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u^{(1)} - (x_2 + x_1) u_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(1)} - (x_2 + x_1) u_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 + x_1) u_2 \ .$$

On a : $u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 + x_1) u_2 = u - x_1 u_1 - (x_2 + x_1) u_2$ et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} \in F$.

Étape 3 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3,u^{(2)}-(x_3/4)u_3) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(3)} = u^{(2)}-(x_3/4)u_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 - (3/4)x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(3)} = u^{(2)} - (x_3/4)u_3 \ .$$

On a : $u^{(3)} = u^{(2)} - (x_3/4)u_3 = u - x_1u_1 - (x_2+x_1)u_2 - (x_3/4)u_3$, Les $v(u_1)$-ème, $v(u_2)$-ème et $v(u_3)$-ème coordonnées de $u^{(3)}$ sont nulles et $u \in F$ équivaut à $u^{(3)} \in F$.

L'algorithme est terminé. Le vecteur u de coordonnées (x_1,x_2,x_3,x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans F si et seulement si $u^{(3)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_4 - x_1 - (3/4)x_3 = 0 \quad .$$

C'est le système d'équations linéaires cherché. De plus, on note que si $u \in F$, $u^{(3)} = 0$ et :

$$u = x_1u_1 + (x_2+x_1)u_2 + (x_3/4)u_3 \quad .$$

5.5 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette section, E désignera un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 5.5.1 *(somme de deux sous-espaces vectoriels) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Notons :*

$$F + G = \{u + v \ ; \ u \in F \text{ et } v \in G\} \subset E \quad .$$

Alors, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et de G.

Preuve : Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$ et $0_E = 0_E + 0_E$, on a $0_E \in F+G$. Ainsi, $F+G$ est un ensemble non vide.

Soit $w_1, w_2 \in F+G$. Par définition, il existe $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$ tels que $w_1 = u_1+v_1$ et $w_2 = u_2+v_2$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} w_1 + w_2 & = & (u_1+v_1)+(u_2+v_2) = u_1+v_1+u_2+v_2 \\ & = & (u_1+u_2)+(v_1+v_2) \quad . \end{array}$$

Or, $u_1+u_2 \in F$, car F est un sous-espaces vectoriel de E et de même $v_1+v_2 \in G$. Il en résulte $w_1+w_2 \in F+G$.

Soit $w \in F+G$ et $\lambda \in K$. Par définition, il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u+v$. Ainsi, $\lambda w = \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$. Comme $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$ (stabilité de F et G par multiplication par un scalaire), on obtient $\lambda w \in F+G$.

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 5.5.2 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F+G$ est directe si tout $w \in F+G$ s'écrit de façon unique $w = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. La somme de F et G est alors notée $F \oplus G$.*

Proposition 5.5.3 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F+G \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\} \quad .$$

Preuve $\Longrightarrow$: Soit $u \in F \cap G$. On remarque que $0_E = 0_E + 0_E = u + (-u)$. Or, $0_E, u \in F$ et $0_E, -u \in G$. Comme la somme $F+G$ est directe, on obtient : $0_E = u$ et $0_E = -u$. Ainsi, $u = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme $0_E \in F \cap G$, on a montré que $F \cap G = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$: Soit $w \in F+G$ et $w = u_1+v_1 = u_2+v_2$ deux décompositions de w comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ($u_1, u_2 \in F$, $v_1, v_2 \in G$). Il en rśulte $u_2 - u_1 = v_1 - v_2$. Or, $u_2 - u_1 = u_2 + (-u_1) \in F$ et de même $v_1 - v_2 \in G$. Il en résulte $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 \in F \cap G$. Donc, $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = 0_E$. Donc, $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$.

Définition 5.5.4 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Tout élément $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.*
- $E = F \oplus G \quad .$
- $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.

On dit alors que F et G sont supplémentaires dans E ou que G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans E.

Lemme 5.5.5 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $F \cap G$. Complétons $(e_1, \ldots, e_r)$ en $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l)$ base de F et complétons $(e_1, \ldots, e_r)$ en $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ base de G. Alors, $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une base de $F + G$.*

On convient de prendre $(e_1, \ldots, e_r)$ égal à l'ensemble vide si $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.

Preuve du lemme : Montrons que $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ engendre $F + G$. Soit $x \in F + G$, Par définition x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Comme $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l)$ est une base de F, y s'écrit :

$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_r e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l \quad \text{où} \quad y_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une base de G, z s'écrit :

$$z = z_1 e_1 + \cdots + z_r e_r + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad \text{où} \quad z_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Il en résulte :

$$x = y + z = (y_1 + z_1)e_1 + \cdots + (y_r + z_r)e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad .$$

Ainsi, tout $x \in F + G$ est combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$.

Montrons maintenant que la famille $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est libre. Soit $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{K}$ tels que :

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l + z_1 g_1 + \cdots + z_m g_m = 0_E \quad .$$

Il en résulte

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l = -z_1 g_1 - \cdots - z_m g_m \in F \cap G \quad .$$

Ainsi, il existe $\lambda_i \in \mathbf{K}$ tels que

$$-z_1 g_1 - \cdots - z_m g_m = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$$

d'où :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + z_1 g_1 + \cdots + z_m g_m = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une famille libre, on en déduit que les z_i sont nuls. Il vient alors :

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_l)$ est une base de F, il vient : $x_1 = \cdots = x_r = y_1 = \cdots = y_l = 0$. Cela montre que la famille $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est libre.

En particulier, si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Comme conséquence directe du lemme, on obtient :

Proposition 5.5.6 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On a :*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

Corollaire 5.5.7 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$- espace vectoriel E de dimension finie.*

$$\begin{aligned} E = F \bigoplus G \quad & \Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\} \quad . \\ & \Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad \text{et} \quad E = F + G \quad . \end{aligned}$$

Proposition 5.5.8 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, F et G sont supplémentaires si et seulement si la reunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E.*

Preuve : On a déjà vu que si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. Cela donne que si F et G sont supplémentaires une base de E s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. La réciproque est laissée au lecteur

5.6 Quelques exemples d'espaces vectoriels

1) Suites de vecteurs d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Donnons nous, pour tout entier n, un élément u_n de E. Cette donnée, notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, est appelée une suite de vecteurs de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de vecteurs de E et $\lambda \in \mathbf{K}$. On note :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} + (v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad .$$

$$\lambda(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad .$$

Muni de ces opérations, l'ensemble des suites de vecteurs de E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Pour $E = \mathbf{R}$, notons pour tout $p \in \mathbf{N}$, $d(p)$ la suite de réels dont le p-ième terme est 1 et les autres termes nuls. Il est facile de voir que pour tout entier l, la famille $(d(1), \dots, d(l))$ est libre. Il en résulte que les suites à valeurs réelles ne forment pas un espace-vectoriel de dimension finie.

2) Les applications d'un ensemble à valeurs dans un K-espace vectoriel : Soit X un ensemble et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, notons E^X l'ensemble des applications de X dans E. Soit $f, g \in E^X$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On note :

$$f + g : X \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad .$$

$$\lambda f : X \longrightarrow E \quad , \quad x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \quad .$$

Muni de ces opérations, l'ensemble E^X est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Pour $X = \mathbf{N}$, E^X n'est autre que l'espace vectoriel des suites de vecteurs de E.

3) Espaces vectoriels produits : Soit E_1 et E_2 deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels. Notons $E_1 \times E_2$ l'ensemble dont les éléments sont les couples (e_1, e_2) où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$. Soit $(e_1, e_2), (e'_1, e'_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On pose :

$$(e_1, e_2) + (e'_1, e'_2) = (e_1 + e'_1, e_2 + e'_2) \quad \text{et} \quad \lambda(e_1, e_2) = (\lambda e_1, \lambda e_2) \quad .$$

Muni de ces opérations, $E_1 \times E_2$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

4) Exemple en analyse : $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et à dérivée seconde continue sur $\mathbf{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \quad ; \quad f'' + f = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Les analystes nous apprennent qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2 de base les fonctions $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ t \mapsto \sin(t)$ et $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ,\ t \mapsto \cos(t)$.