6 Applications linéaires

6.1 Introduction

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle est compatible à l'addition et à la multiplication par un scalaire : pour tout u, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Soit alors $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si V est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $f(V)$ des images par f des vecteurs de V est alors un sous-espace vectoriel de F. En particulier, l'ensemble des images de tous les vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.
- Si W est un sous-espace vectoriel de F, l'ensemble $f^{-1}(W)$ des vecteurs de E dont l'image par f est dans W est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est nulle est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f et noté $\ker f$.

Si le noyau de f est réduit au vecteur nul et que tout vecteur de F est image d'un vecteur de E par f, l'application f est bijective et identifie les vecteurs de E et les vecteurs de F. L'application inverse qui a un vecteur de F associe le vecteur de E dont il est l'image est elle même linéaire.

Lorsque E est de dimension finie, on a toujours :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Im} f \quad .$$

Supposons E munie d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$, on appelle matrice de f relativement à ces bases la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Cette matrice détermine les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f d'un vecteur par multiplication à droite par les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. Une fois fixée les bases, associer à une application linéaire sa matrice est compatible aux opérations naturelles sur les applications linéaires : addition, multilication par un scalaire, composition, ...

Une famille d'exemple d'applications linéaires est donnée par les symétries ou les projections associées naturellement à deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel.

Objectif

- Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice dans d'anciennes bases : $B = Q^{-1}AP$.
- Savoir calculer le noyau et l'image d'une application linéaire en fonction de sa matrice.
- Savoir déterminer une symétrie et une projection vectorielle

6.2 Généralités sur les applications ensemblistes

Soit X et Y deux ensembles. Une application f de source X et de but Y est un procédé qui associe à tout élément x de X, un élément noté $f(x)$ de Y. On note cette information en écrivant que f est l'application :

$$f \ : \ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \longmapsto y = f(x) \quad .$$

Exemple : a) L'application f de l'ensemble des nombres réels vers lui même :

$$f \ : \ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad x \mapsto y = f(x) = 2x + 3 \quad .$$

Le "procédé" est multiplier par deux et ajouter trois.
b) L'application g de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$:

$$g \ : \ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto y = g(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_3^5 + 2 \quad .$$

Le "procédé" est préciser par l'expression de g.

Soit E et F deux ensembles, on note $E \times F$ l'ensemble dont les éléments sont les couples formés par un élément de E et un élément de F.

Autre exemple d'application : a) L'addition entre triplets de réels est l'application :

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad (\ (a,b,c)\ ,\ (a',b',c')\ ) \mapsto (a,b,c) + (a',b',c') = (a+a', b+b', c+c') \quad .$$

b) Si X est un ensemble, l'application Id_X est l'application qui ne change rien :

$$\mathrm{Id}_X \ :\ X \longrightarrow X \quad , \quad x \mapsto y = \mathrm{Id}_X(x) = x \quad .$$

Définition 6.2.1 *Considérons l'application :*

$$f \ :\ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \mapsto y = f(x) \quad .$$

Soit x dans X, l'élément $f(x)$ de Y est appelé l'image de x par f. Soit $y \in Y$, les éléments $x \in X$ tels que $f(x) = y$ sont appelés les antécédents de y par f.

Définition 6.2.2 *Considérons l'application :*

$$f \ :\ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \longmapsto y = f(x) \quad .$$

- *L'application f est dite injective si tout élément $y \in Y$ possède 0 ou 1 antécédent.*
- *L'application f est dite surjective si tout élément $y \in Y$ possède 1 ou plus d'antécédents.*
- *L'application f est dite bijective si tout élément $y \in Y$ possède exactement 1 antécédent.*

Ainsi, une applicatiion est bijective si et seulement si elle est surjective et injective.

Définition 6.2.3 *Considérons l'application :*

$$f \ : \ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \longmapsto y = f(x) \quad .$$

Si f est bijective, on appelle application inverse ou réciproque de f, l'application notée f^{-1} :

$$f^{-1} \ : \ Y \longrightarrow X \quad , \quad y \mapsto x = f^{-1}(y) \quad \text{le seul antécédent de } y \text{ par } f \quad .$$

On notera que si f est bijective :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \quad .$$

Proposition 6.2.4 *Soit $f \ : \ X \longrightarrow Y$ et $g \ : \ Y \longrightarrow Z$ deux applications.*

- *Si f et g sont injectives, gof est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, gof est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, gof est bijective.*

Preuve : Laissé au lecteur.

Si E désigne un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de E.

Ainsi :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \quad .$$

Définition 6.2.5 *Considérons une application :*

$$f \ : \ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \mapsto y = f(x) \quad .$$

Alors d'une part, l'application f induit une application notée abusivement f de $\mathcal{P}(X)$ vers $\mathcal{P}(Y)$:

$$f \ : \ \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \quad , \quad A \mapsto B = f(A) = \{f(x) \text{ tels que } x \in A\} \quad .$$

D'autre part, l'application f induit une application notée encore plus abusivement f^{-1} de $\mathcal{P}(Y)$ vers $\mathcal{P}(X)$:

$$f^{-1} \ : \ \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \quad , \quad B \mapsto A = f^{-1}(B) = \{x \in X \text{ tels que } f(x) \in B\} \quad .$$

On notera que l'on ne demande pas que f soit bijective pour définir les applications ensemblistes f et f^{-1}. Par contre si f est bijective, on peut observer que l'application $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ est bijective d'inverse $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

Si A est un sous-ensemble de X, $f(A)$ n'est autre que l'ensemble des images par f des éléments de A et si B est un sous-ensemble de Y, $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

Exemple : Considérons la projection :

$$p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \longmapsto p(x_1, x_2) = x_1 \quad .$$

L'application p est surjective, mais non injective. En effet, tout réel a est la projection d'un élément, par exemple : $p(a, 17) = a$. Par contre, tout réel par exemple -19 a plus d'un antécédent. Il en a même une infinité : tous les couples de la forme $(-19, y)$ sont des antécédents de -19 par p. Autrement dit :

$$p^{-1}(\{-19\}) = \{(-19, y) \text{ tel que } y \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Définition 6.2.6 *Considérons une application :*

$$f \ : \ X \longrightarrow Y \quad , \quad x \longmapsto y = f(x) \quad .$$

On appelle image de f le sous-ensemble $f(X)$ de Y constitué de l'ensemble des images par f des éléments de X.

Il résulte de la seule définition de l'image de $f : X \to Y$ que f est surjective si et seulement si $f(X) = Y$.

A titre d'exercice, le lecteur pourra montrer que si f est une application de X vers Y : pour tout sous-ensemble B de Y, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$ et pour tout sous-ensemble A de X, $A \subset f^{-1}f(A)$.

6.3 Définitions et opérations sur les applications linéaires

Dans cette section, $\mathbf{K}$ désignera un corps et E et F deux K-espaces vectoriels.

Définition 6.3.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, une application linéaire de E vers F est une application $f : E \to F$ vérifiant :*

$$\forall\, u\,,\ v\ \in\ E\,,\ \forall\, \lambda\ \in\ K \quad : \quad f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda\, u) = \lambda f(u) \quad .$$

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on notera que pour tout $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$:

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) \quad ,$$

que $f(0_E) = 0_F$ et que pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$: $f(-u) = -f(u)$ et $f(-\lambda u) = -\lambda f(u)$.

Notation 6.3.2 *On note $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F et $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers E. Un élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est parfois appelé endomorphisme de E.*

Exemple clef : Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$. Et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$ (cela signifie que l'élément de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne de A est $a_{i,j}$).

Écrivons les éléments de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ en colonne. Cela revient à identifier $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ respectivement aux matrices ayant une colonne et n lignes et une colonne et m lignes.

Associons à la matrice A, l'application $f : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$ définie par :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad .$$

Cette application est linéaire. Cela résulte par exemple des propriétés du produit matriciel (voir chapître 3). Maintenant, il est tout aussi bien de le vérifier directement en remarquant que pour tout $x, x' \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad .$$

On pourra noter que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ donnent la même application f de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$, les matrices A et B sont égales. En effet, Si e_i est le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$:

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} \quad .$$

qui est la ième colonne de A. Ainsi, A est caractérisée par f.

Inversement si $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$. Soit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)$ le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$, notons $a_{i,j}$ la jème coordonnée de $f(e_i)$ danns la base canonique de $\mathbf{K}^m$. Autrement dit :

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} \quad .$$

Soit, $A \in$ la matrice de terme général $a_{i,j}$. Par linéarité :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$ sont de la forme $*$.

Nous avons en fait montré que l'application :

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$$

qui à une matrice A associe l'application linéaire :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

est une bijection. Nous verrons que A n'est autre que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$.

Remarque 6.3.3 Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'inclusion $i : F \to E$, $x \mapsto x$ est linéaire.

Notation 6.3.4 *L'identité de E, notée Id_E est l'application :* $\mathrm{Id}_E : E \to E \;,\; u \mapsto \mathrm{Id}_E(u) = u$. *Cette application est linéaire.*

Définition 6.3.5 *Soit E un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et $\lambda \in K$. L'application*

$$h_\lambda \;:\; E \to E \quad x \longmapsto h_\lambda(x) = \lambda x$$

est appelée homothétie de rapport λ. C'est une application linéaire.

Proposition 6.3.6 *Soit E, F, G trois* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$, l'application composée $g \circ f$ est linéaire.*

Preuve : Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En utilisant successivement la définition de $g \circ f$, la linéarité de f, puis de g et la définition de $g \circ f$, on obtient :

$$\begin{array}{l} (g \circ f)(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v) \\ (g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda\, f(u)) = \lambda\, g(f(u))) = \lambda\, (g \circ f)(u) \quad . \end{array}$$

Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. On note $f_1 + f_2$ et λf_1, les applications :

$$\begin{array}{rcl} f_1 + f_2 : E \longrightarrow F & , & u \longmapsto (f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) \\ \lambda f_1 : E \longrightarrow F & , & u \longmapsto (\lambda\, f_1)(u) = \lambda(f_1(u)) \quad . \end{array}$$

Proposition 6.3.7 *Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. Les applications f_1+f_2 et λf_1 sont linéaires. Munis de ces opérations, $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Laissée au lecteur. On notera que le vecteur nul de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $0 : E \to F$, qui associe à tout vecteur u de E le vecteur nul de F. L'opposée de l'application $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $-f : E \to F$ définie par $f(u) = -f(u)$.

Proposition 6.3.8 *Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $\lambda \in K$. Soit $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E',E)$ et $l \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,F')$:*

$$l \circ (f_1+f_2) = l \circ f_1 + l \circ f_2 \quad , \quad (f_1+f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h \quad .$$

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G), \lambda \in \mathbf{K}$:

$$g \circ (\lambda f) = (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) \quad .$$

Corollaire 6.3.9 *L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est muni de trois opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition. L'addition et la composition munissent $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ d'une structure d'anneau unitaire d'unité Id_E. Cet anneau est non commutatif dès que $\dim_{\mathbf{K}}(E) > 1$.*

Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, on notera $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composée de k fois l'application f par elle même.

Proposition 6.3.10 *Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est bijective, l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est alors linéaire : $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,E)$. On dit alors que f est un isomorphisme linéaire et que E et F sont isomorphes.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ bijective. Rappelons que cela signifie que pour tout $v \in F$, il existe un unique vecteur de E tel que $f(u) = v$. L'application réciproque est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à un vecteur $v \in F$ le seul vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Nous devons montrer que f^{-1} est linéaire. Soit $v, v' \in F$ et $\lambda \in K$. Notons $u = f^{-1}(v)$ et $u' = f^{-1}(v')$. Comme $f(u+u') = f(u) + f(u') = v + v'$, il vient $u + u' = f^{-1}(v+v')$. Ainsi, $f^{-1}(v+v') = f^{-1}(v) + f^{-1}(v')$. De même, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v$. Ainsi, $f^{-1}(\lambda v) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$. Cela montre que l'application f^{-1} est linéaire.

Notation 6.3.11 *On note* $\mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E) \subset \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ *l'ensemble des isomorphismes linéaires de* E *vers* E. $\mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E)$ *est un groupe pour la loi de composition. Ce groupe est non commutatif dès que* $\dim_{\mathbf{K}}(E) > 1$.

Exemples d'isomorphismes linéaires : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application :

$$E \longrightarrow \mathbf{K}^n \ , \ u \longmapsto \text{ les coordonnées de u dans la base } \mathcal{B}$$

est un isomorphisme linéaire. Son application inverse est l'application :

$$\mathbf{K}^n \longrightarrow E \ , \ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad .$$

Une conséquence est que deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension sont toujours isomorphes.

6.4 Application linéaire et sous-espaces vectoriels

Proposition 6.4.1 *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire entre deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*
1) Pour tout sous-espace vectoriel V *de* E, $f(V)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.
2) Pour tout sous-espace vectoriel W *de* F, $f^{-1}(W)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Preuve de 1) : L'ensemble $f(V)$ est non vide, car $0_E \in V$ et donc $f(0_E) = 0_F \in f(V)$.

Soit $y, y' \in f(V)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Par définition de $f(V)$, il existe x et $x' \in V$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a alors en utilisant la linéarité de f :

$$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \quad \text{et} \quad \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \quad .$$

Comme V est un sous-espace vectoriel, $x + x'$ et λx sont des vecteurs de V. Il en résulte que et $y + y'$ et λy appartiennent à $f(V)$. Ainsi, $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve de 2) : L'ensemble $f^{-1}(W)$ est non vide, car $f(0_E) = 0_F \in W$. Ainsi, $0_E \in f^{-1}(W)$.

Soit $x, x' \in f^{-1}(W)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi, $f(x), f(x') \in W$. Comme f est linéaire, $f(x+x') = f(x) + f(x')$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Comme W est un sous-espace vectoriel, nous en déduisons $f(x+x'), f(\lambda x) \in W$. Il en résulte que $x + x', \lambda x \in f^{-1}(W)$. Donc, $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 6.4.2 *(Image d'une application linéaire) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle image de f et on note* $\operatorname{im} f$ *le sous-espace vectoriel de F :*

$$\operatorname{im} f = f(E) = \{f(u) \text{ tels que } u \in E\} \subset F \quad .$$

Définition 6.4.3 *(Noyau d'une application linéaire) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle noyau de f et on note* $\ker f$*, le sous-espace vectoriel de E :*

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = 0_F\} \subset E \quad .$$

Justification : Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Comme E est espace vectoriel, il résulte de la proposition **??** que $f(E)$, l'image de f, est un sous-espace vectoriel. De même, $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F et $\ker f$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 6.4.4 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{im} f = F \qquad \text{et} \qquad f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\} \quad .$$

Preuve : La première assertion résulte de la définition de la surjectivité.

Montrons la deuxième assertion. Supposons injective. Comme $f(0_E) = 0_F$ et que f est injective, c'est que 0_E est la seule solution de $x \in E$ et $f(x) = 0_F$. Donc, $\ker f = \{0_E\}$. Supposons maintenant que $\ker f = \{0_E\}$. Soit $y \in F$ et $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') = y$. On obtient, $f(x) - f(x') = 0$. Il résulte de la linéarité de f que $f(x - x') = 0$. Ainsi, $x - x' \in \ker f = \{0_E\}$ et donc $x = x'$. Ainsi pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution. L'application f est donc injective.

Proposition 6.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $v_1, v_2, \ldots, v_p \in E$. Alors :*

$$f(\operatorname{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)) = \operatorname{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)) \quad .$$

Preuve : Si $y \in \text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, le vecteur y s'écrit $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ avec $\lambda_i \in \mathbf{K}$. On a par linéarité de f : $f(y) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. Ainsi, $f(y) \in \text{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$.
Inversement, si $y \in \text{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. D'où, puisque f est linéaire, $y = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p)$. Or, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \in \text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ et donc $y \in f(\text{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p))$. On a ainsi montré l'égalité cherchée.

Proposition 6.4.6 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

1. *Supposons f injective : Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre, la famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F.*

2. *Supposons f surjective : Si $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ est une famille génératrice de E, la famille $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ est une famille génératrice de F.*

3. *Si f est un isomorphisme linéaire, l'image d'une base de E est une base de F.*

Preuve de 1) : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F$. Puisque f est linéaire, nous avons donc : $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = 0_F$. Puisque, f est injective, nous obtenons $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$. La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ étant libre, il en résulte $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Cela assure que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre

Preuve de 2) : Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ est une famille génératrice de E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ tels que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l$. Ainsi,

$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l) \quad .$$

L'application f étant linéaire, nous obtenons : $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_l f(v_l)$. Cela montre que tout y de F est combinaison linéaire de $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l)$. La famille $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ est donc une famille génératrice de F.
Preuve de 2) : Résulte de 1 et 2.

6.5 Bases, dimension et applications linéaires

Proposition 6.5.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f(e_i) = u_i$.*

Preuve par "analyse synthèse" :
Analyse : Soit f une telle application. Soit $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Comme f est linéaire, on obtient :

$$f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \quad .$$

L'application $f : E \to F$ est donc nécessairement l'application définie par $f(x) = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$. où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. L'application cherchée est donc unique. Il reste à vérifier que cette application convient.

Syntèse : Montrons que f convient. C'est à dire que f est linéaire et que $f(e_i) = u_i$. Comme les coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est placé à la i-ème place, on a bien :

$$f(e_i) = 0u_1 + \ldots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \ldots + 0u_n$$

ainsi $f(e_i) = u_i$.

Il reste à montrer que cette application f est lináire. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur $x + y$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur λx a pour coordonnées $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} f(x+y) & = & (x_1 + y_1)u_1 + \ldots + (x_n + y_n)u_n \\ & = & (x_1u_1 + \dots + x_nu_n) + (y_1u_1 + \dots + y_nu_n) \\ & = & f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) & = & \lambda x_1u_1 + \dots + \lambda x_nu_n \\ & = & \lambda(x_1u_1 + \dots + x_nu_n) \\ & = & \lambda f(x) \end{array}$$

Ainsi, f est linéaire, f convient et la proposition est démontrée.

Proposition 6.5.2 *(dimension de la source, du noyau et de l'image) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On suppose E de dimension n et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Alors :*

$$n = \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f \quad .$$

Preuve : L'espace vectoriel E admet une base de cardinal n. Nous avons vu alors que tout sous-espace vectoriel de E admet une base et que toute base d'un sous-espace vectoriel de E peut être complété en une base de E. Appliquons cette remarque à $\ker f$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker f$. Complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Notons que $f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n) \in \mathrm{im}\, f$ et montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}\, f$.

Soit $y \in \mathrm{im}\, f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. En utilisant la linéarité de f et le fait que $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs de $\ker f$, on obtient :

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}\, f$. Montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre. Soit $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$. Comme f est linéaire, on obtient : $f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$. Ainsi, $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n \in ker f$. Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\ker f$, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p$$

D'où :

$$\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, c'est une famille libre. En particulier, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. On a ainsi montré que la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.

En conclusion, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}\, f$. Ainsi, $\mathrm{im}\, f$ est de dimension $n - p$ et :

$$\dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = p + (n - p) = n = \dim_{\mathbf{K}} E \quad .$$

Corollaire 6.5.3 *Soit E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de* **même dimension***. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injectice*
2. *f est surjective*
3. *f est un isomorphisme*

Preuve $1 \Longrightarrow 2$ **:** Si f est injective, $\ker f = \{0_E\}$. Donc, $\dim_{\mathbf{K}} \ker f = 0$. Il résulte de la formule de dimension de la proposition **??** :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f$$

Comme E et F, ont même dimension $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} F$. Ainsi, $\mathrm{im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F qui a la même dimension que F. Il en résulte $\mathrm{im}\, f = F$. C'est à dire (voir proposition **??**) : f surjective.

Preuve $2 \Longrightarrow 3$ **:** Si f est surjective, $\mathrm{im}\, f = F$ et $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} F$. Comme E et F, ont même dimension, on obtient $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} E$ Il résulte de la formule de dimension de la proposition **??** : $\dim_{\mathbf{K}} \ker f = 0$. Ainsi, $\ker f = \{0_E\}$. Il résulte encore de la proposition **??** que f est injective. Étant injective et surjective, f est donc bijective. C'est un isomorphisme.

Preuve $3 \Longrightarrow 1$ **:** Si f est isomorphisme, f est bijective et en particulier injective.

Cela montre que les trois propriétés sont équivalentes.

6.6 Matrice d'une application linéaire

Définition 6.6.1 *Soit E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. On suppose donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ définie comme suit : la i-ème colonne de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est formé des coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

On dit encore que $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ est la matrice de f avec comme base d'arrivée $\mathcal{B}'$ et base de départ $\mathcal{B}$.

Proposition 6.6.2 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On suppose donnée une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_m)$ de F.*

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.*

Soit $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ *la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

Alors :

$$Y=\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})X \quad .$$

Preuve : Soit $a_{i,j}$ le terme de j-ème ligne et de la i-ème colonne de $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$. Ecrivons en colonnes les coordonnées. Par définition, les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} \quad .$$

$$f(u)=f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=x_1f(e_1)+\ldots+x_nf(e_n) \quad .$$

Par linéarité des coordonnées, passons cette égalité aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+\cdots+a_{m,n}x_n \end{pmatrix}=\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Définition 6.6.3 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Soit $f\in\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$. On appelle matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathcal{M}(f,\mathcal{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie comme suit : la i-ème colonne de $\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$ est formé des coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est appelée matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la même base $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ on a :

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})X \quad .$$

Exemple : Ecrivons les éléments de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ en colonne. Considérons l'application linéaire :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \ , \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = e'_1 + 3e'_2 + 5e'_3 \ f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2e'_1 + 4e'_2 + 6e'_3 \ .$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Plus généralement, soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une famille d'éléments de K, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$ et f l'application linéaire

$$f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

où les éléments de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ sont écrits en colonne. Alors si $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbf{K}^m$ et $\mathbf{K}^n$:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice : Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $\epsilon_1 = (1,1)$ et $\epsilon_2 = (1,17)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
b) Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = \epsilon_1$ et $f(e_2) = \epsilon_2$. Calculer les matrices $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$.
c) Calculer les matrices $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_2, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Solution : a) Les coordonnées de ϵ_1 et et ϵ_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement $(1,1)$ et $(1,17)$. Autrement dit, $\epsilon_1 = e_1 + e_2$ et $\epsilon_2 = e_1 + 17e_2$ La matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$$

est de déterminant 16. Elle est donc inversible. Ainsi, $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Par définition de f, $f(e_1) = \epsilon_1$ et $f(e_2) = \epsilon_2$ et donc :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

On a :

$$f(e_1) = \epsilon_1 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \epsilon_2 = e_1 + 17e_2 \quad .$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

On a :

$$f(\epsilon_1) = f(e_1)+f(e_2) = \epsilon_1+\epsilon_2 = 2e_1+18e_2 \quad \text{et} \quad f(\epsilon_2) = f(e_1)+17f(e_2) = \epsilon_1+17\epsilon_2 = (e_1+e_2)+17e_1+17e_2 = 18e_1+289e_2 \quad .$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 18 & 289 \end{pmatrix} = 2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

On a ici $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')$, mais en général ces matrices sont différentes.
c) Nous avons vu que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Posons :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

C'est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$ vers la nouvelle base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Le calcul donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Ainsi :

$$e_1 = \frac{17}{16}\epsilon_1 - \frac{1}{16}\epsilon_2 \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{1}{16}\epsilon_1 + \frac{1}{16}\epsilon_2 \quad .$$

On a :

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}(\epsilon_1) = \epsilon_1 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}(\epsilon_2) = \epsilon_2 = e_1 + 17e_2 \quad .$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} = P$$

On a :

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}(e_1) = e_1 = \frac{17}{16}\epsilon_1 - \frac{1}{16}\epsilon_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}(e_2) = e_2 = -\frac{1}{16}\epsilon_1 + \frac{1}{16}\epsilon_2 \quad .$$

Ainsi :

$$\mathcal{M}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

Proposition 6.6.4 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f,g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:*

$$\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) + \mathcal{M}(g,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad .$$

Si G est un troisième espace vectoriel, $\mathcal{B}''$ une base de G et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$:

$$\mathcal{M}(g \circ f,\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad .$$

Preuve : Le premier point provient du fait que si e_i est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $(f+g)(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en ajoutant les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ à ceux de $g(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Le deuxième point provient du fait que si e_i est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $\lambda f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en multipliant par λ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Montrons plus précisement le troisième point. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$, $b_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$ $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$, $\mathcal{B}'=(e'_1,\ldots,e'_m)$, et $\mathcal{B}''=(e''_1,\ldots,e''_p)$.

$$\begin{aligned}
g \circ f(e_i) &= g(a_{1,i}e'_1 + \cdots + a_{m,i}e'_m) \\
&= a_{1,i}g(e'_1) + \cdots + a_{m,i}g(e'_m) \\
&= a_{1,i}(b_{1,1}e''_1 + \cdots + b_{p,1}e''_p) + \cdots + a_{m,i}(b_{1,m}e''_1 + \cdots + b_{p,m}e''_p) \\
&= (b_{1,1}a_{1,i} + \cdots b_{1,m}a_{m,i})e''_1 + \cdots + (b_{p,1}a_{1,i} + \cdots + b_{p,m}a_{m,i}
\end{aligned}$$

Or, par définition du produit ligne colonne le terme général de la matrice produit $\mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ est $b_{j,1}a_{1,i} + \cdots + b_{j,m}a_{m,i}$. La troisième assertion de la proposition en résulte.

En particulier, si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E, si $f,g,h \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}) + \mathcal{M}(gf,\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{M}(g \circ f,\mathcal{B}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{B})\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$$

Proposition 6.6.5 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(e'_1,\ldots,e'_m)$ une base de F. L'application :*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \quad , \quad f \longmapsto \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Idée de la Preuve : la linéarité de notre application résulte de la proposition précédente. La bijectivité résulte de la proposition **??**.

On notera que deux applications $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ sont égales si et seulement si leurs matrices $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ sont égales.

Remarque 6.6.6 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. La matrice de Id_E dans toutes les bases de E est la matrice Id_n.

Proposition 6.6.7 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. On a alors $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$*

bf Preuve : Si f est un isomorphisme, en utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B})\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Ainsi, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. et $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$.
Si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible, d'après la proposition **??** il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$. En utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ g, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Or, Id_n est la matrice de Id_E dans la base $\mathcal{B}$. On déduit de la proposition : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Cette propriété assure que f est bijective d'application réciproque g.

6.7 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel , $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Rappelons que nous avions appelé matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont i-ème colonne est formée des coordonnées de e'_i dans la base $\mathcal{B}$. La matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

On peut observer que P n'est autre que la matrice de l'application linéaire identité avec $\mathcal{B}'$ comme base de départ et $\mathcal{B}$ comme base d'arrivée. Autrement dit :

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \quad .$$

L'interêt de cette matrice est que si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X \quad .$$

Proposition 6.7.1 *Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ deux bases respectivement de E et F et $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1)$ la matrice de f avec base de départ $\mathcal{B}_1$ et base d'arrivée $\mathcal{B}_1'$. Soit $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_2'$ deux nouvelles bases respectivement de E et F et $B = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_2)$ la matrice de f avec la nouvelle base de départ $\mathcal{B}_2$ et la nouvelle base d'arrivée $\mathcal{B}_2'$. Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1'$ à la base $\mathcal{B}_2'$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$, alors :*

$$B = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QBP^{-1} \quad .$$

Preuve : Donnons deux preuves de ce résultat important.
Première preuve : De la proposition **??**, il résulte :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_2) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_F, \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_1')\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1)\mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$$

Il reste a utiliser le lien entre les matrices de passage et les matrices de l'identité dans deux bases différentes.
Deuxième preuve : Soit en colonne X_1 et X_2 les coordonnées d'un vecteur u de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et Y_1 et Y_2 les coordonnées du vecteur $f(u)$ de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_2'$. On a :

$$Y_1 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_1)X_1 \quad , \quad X_1 = PX_2 \quad , \quad Y_2 = Q^{-1}Y_1 \quad .$$

Ainsi :

$$Y_2 = Q^{-1}Y_1 = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)X_1) = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)(PX_2)) = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P\, X_2 \quad .$$

L'application qui a X_2 associe Y_2 est définie par :

$$Y_2 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2)X_2 = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P\, X_2 \quad ,$$

Elle est linéaire. On en déduit donc (voir exemple clef du paragraphe **??**) :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2) = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P \quad .$$

Corollaire 6.7.2 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une deuxième base de E (dite nouvelle base). Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la $\mathcal{B}_2$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$. Alors :*

$$B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PBP^{-1} \quad .$$

Exercice : Soit $\epsilon_1 = (1, 16)$ et $\epsilon_2 = (1, 17)$ et f l'application linéaire :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2\ ,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33x_1 - 2x_2 \\ 544x_1 - 33x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$ à la base $\mathcal{B}'$? Quelle est la matrice de passage de base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base $\mathcal{B}'$?
2) Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$?
3) Calculer $f(\epsilon_1)$ et $f(\epsilon_2)$ à l'aide de A. En déduire directement B.

Solution : 1) Les coordonées de ϵ_1 et ϵ_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement $(1, 16)$ et $(1, 17)$. On a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 1. Donc, cette matrice est inversible et (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ à la base canonique $\mathcal{B}$ est la matrice P^{-1}. Le calcul du déterminant de P et de sa comatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -16 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Suivant le paragraphe **??**, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 33 & -2 \\ 544 & -33 \end{pmatrix} \quad .$$

D'après le corollaire **??** :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 & -2 \\ 544 & -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ -16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 16 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On imagine que pour travailler avec f, on ait avantage à le faire dans la base (ϵ_1, ϵ_2).
3)

$$f(\epsilon_1) = \begin{pmatrix} 33 & -2 \\ 544 & -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix} = \epsilon_1 \quad .$$

$$f(\epsilon_2) = \begin{pmatrix} 33 & -2 \\ 544 & -33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -17 \end{pmatrix} = -\epsilon_2 \quad .$$

Par définition de B, on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

6.8 Projection et symétrie vectorielle

Définition 6.8.1 *(projection et symétrie) Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un* **K**-*espace vectoriel E : $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur u de E s'écrit donc de façon unique $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.*
1) L'application $p : E \to E\,,\ u \mapsto p(u) = u_1$ est linéaire. Elle est appelée projection sur E_1 parallélement à E_2.

$$\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker p = E_2 \quad \text{et} \quad p^2 = p \quad .$$

2) L'application $s : E \to E\,,\ u \mapsto s(u) = u_1 - u_2$ est linéaire. Elle est appelée symétrie par rapport à E_1 parallélement à E_2.

$$\ker(s - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E_2 \quad \text{et} \quad s^2 = \mathrm{Id}_E \quad .$$

En particulier, s est un isomorphisme linéaire et $s^{-1} = s$.

Exercice : Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $D = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ la droite vectorielle de base $(1,1,1)$.
1) Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2) Expliciter la symétrie par rapport P parallélement à D. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$?
3) Soit $\epsilon_1 = (-1,1,0)$, $\epsilon_2 = (-1,0,1)$ et $\epsilon_3 = (1,1,1)$. Montrer que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base notée $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^3$. Quelle est la matrice de la symétrie par rapport P parallélement à D dans cette base ?

1) Par résolution de l'équation $x+y+z = 0$, on obtient que P est un plan vectoriel de base $((-1,1,0),(-1,0,1))$. Ainsi, $\dim P + \dim D = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbf{R}^3$. Pour montrer que P et D sont supplémentaires, il reste à montrer que $P \cap D = \{0\}$ Soit $u \in P \cap D$. Exprimons que $u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda(1,1,1)$. D'où, $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Comme $u \in P$, les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vérifie l'équation de P. Ainsi, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$, soit $3\lambda = 0$. D'où $\lambda = 0$ et $u = 0$. Donc, $P \cap D = \{0\}$ et $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, u s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in P$ et $u_2 \in D$. Comme $u_2 \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_2 = \lambda(1,1,1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Il vient $u_1 = u - u_2 = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in P$. Il en résulte :

$x-\lambda+y-\lambda+z-\lambda=0$. Soit : $\lambda=(1/3)(x+y+z)$ et

$$u_2=\frac{1}{3}(x+y+z)(1,1,1) \quad \text{et} \quad u_1=(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}) \quad .$$

La symétrie par rapport à P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$s:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u=(x,y,z)\longmapsto u_1-u_2=(\frac{x-2y-2z}{3},\frac{-2x+y-2z}{3},\frac{-2x-2y+z}{3}) \quad .$$

La projection sur P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$p:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u=(x,y,z)\longmapsto u_1=(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}) \quad .$$

La matrice de s dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est de déterminant 3. Elle est donc inversible et $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Comme ϵ_1 et ϵ_2 appartiennent à P : $s(\epsilon_1)=\epsilon_1$ et $s(\epsilon_2)=\epsilon_2$. Comme ϵ_3 est dans D, $s(\epsilon_3)=-\epsilon_3$. Il en résulte que la matrice de s dans la base $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

6.9 Détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $\mathrm{M} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Image : Par définition, $\operatorname{im} f = f(E)$.Il résulte de la proposition **??** que $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1, \ldots, f(e_n))$. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ n'est autre que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Ainsi, l'algorithme de la section 5.1 nous fournit à partir de la $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ une base échelonnée de $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1, \ldots, f(e_n))$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$. On obtient en particulier la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{im} f$. L'algorithme de la section 5.2 nous permet aussi de déduire de cette base échelonnée de $\operatorname{im} f$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ un système d'équations de $\operatorname{im} f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

La formule liant la dimension de la base, du noyau et de l 'image donnera alors la dimension du sous-espace vectoriel $\ker f$. Comme l'algorithme de la section 5.1 donne des relations entre les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, nous déduisons de ces relations des vecteurs de $\ker f$. On peut alors déterminer une base de $\ker f$

En particulier, l'algorithme de la section 5.1 permet de décider à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ si f est injective ou surjective.

Noyau : Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, x est dans le noyau de f si et seulement $Y = 0$. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, nous obtenons alors que le système d'équations homogènes de m équations à n variables :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

est un systéme d'équations de $\ker f$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Si on résoud ce systéme homogéne par les algorithmes de la section 3, on obtiendra une base de $\ker f$ échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Par la formule liant la dimension de E, du noyau et de l 'image, nous en déduirons la dimension de $\operatorname{im} f$.

Exercice : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Préciser $\operatorname{im} f$ et $\ker f$.

méthode 1 **, via l'image :** L'image de f est donc le sous-espace vectoriel engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Étape 2 :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - 2f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Étape 3 :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

On obtient ainsi que $(f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, f(e_2) - f(e_1) = -2e_2 - 2e_3$ est une base échelonnée de $\operatorname{im} f$ relativement à $\mathcal{B}$. Ainsi, l'image de f est de dimension 2. Il en résulte que le noyau de f est de dimension 1. Or, nous avons $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = 0$. Comme $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = f(e_3 - e_1 - e_2)$, il en résulte que $e_3 - e_1 - e_2$ est un vecteur de $\ker f$. Ce vecteur est non nul, le noyau est de dimension 1. Donc, $e_3 - e_1 - e_2$ est une base de $\ker f$.

méthode 2 via le noyau : Si u est de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, un système d'équations de $\ker f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Résolvons le système : Étape 2 :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Étape 3 :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, le systéme :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

est un système échelonné d'équations de $\ker f$ dans la base $\mathcal{B}$. Il admet x_3 comme seule variable libre. Nous obtenons : $x_2 = -x_3$, puis $x_1 = -x_3$. Ainsi, les coordonndés des vecteurs de $\ker f$ sont :

$$\{x_3(-1, -1, 1) \text{ tels que } \; x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

On en déduit :

$$\ker f = \{x_3(-e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Le vecteur $-e_1 - e_2 + e_3$ est une base de $\ker f$. Cela nous apprends que le noyau de f est de dimension 1, son image est donc de dimension 2. Pour déterminer une base l'image de f, il suffit de donner deux vecteurs indépendants de cette image. On pourra vérifier par exemple que $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ forment une famille libre. C'est donc une base de $\operatorname{im} f$.