I Généralités sur les ensembles et applications

1) Ensemble : Définition des ensembles, sous-ensembles, symbole $\in$, $\subset$, $\emptyset$

2) Opérations sur les ensembles : Intersection, réunion, complémentaire, cardinal, formule de cardinal, produit cartésien

3) Applications entre 2 ensembles : source, but, image, antécédent

4) Composition des applications

5) Application injective, surjective, bijective : définitions, application réciproque, fonction et domaine de définition

II $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels

1) Représentation d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$: intervalle, valeur absolue

2) Représentation d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$: droites, demi-plans

3) Opération sur les n-uplets de réels

4) Distance de 2 n uplets de réels : définition, boule de $\mathbb{R}^n$ ouverts de $\mathbb{R}^n$, fermés, bornés, exemples

5) Illustration : distance, ouverts, fermés, bornés : $n = 1$ $n = 2$, cercle

III Fonctions numériques, généralités

1) Définitions, exemples : opérations sur les fonctions numériques fonctions polynomiales

2) Limites et continuité des fonctions numériques = définitions, opérations sur les limites, restriction d'une application, exemples fonctions polynomiales et rationnelles

3) Dérivée d'une fonction numérique d'une variable = définition règles de dérivations, fonction polynomiales et rationelles

4) Dérivées partielles : définition, fonction polynomiales et rationelles

5) Fonctions numériques à dérivées partielles continues : différentielle, approximation à l'ordre 0 et 1

IV Fonction numérique d'une variable

1) Courbe représentative : définition, équation sécante, tangente

2) Croissance, décroissance : définition, $f'>0$, $f'<0$, $f'=0$, extension de la notion de limite, $f'>0$ sur $]a,b[\rightarrow$ bijection, exemple fonction racine, $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$.

3) Quelques fonctions utiles en économie : fonction logarithme, fonction exponentielle, fonction puissance

4) Fonctions numériques homogènes (plusieurs variables)

5) Compléments sur les limites d'une fonction numérique d'une variable

V Maximum et minimum d'une fonction numérique

1) premiers résultats : définition, max, min, max loc, min loc d'une fonction numérique de source $X \subset \mathbb{R}^n$, max loc et min loc sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ pt critique

2) Dérivées partielles d'ordre $\geqslant 2$: définitions, identité de Schwarz

3) Pb de maximum et minimum sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ conditions pour qu'un pt critique donne un maximum local un minimum local

4) Problème d'extremum avec contrainte : maximum local ou minimum local de f sur $g = k$ (condition nécessaire)

5) Fonction numérique continue : pour une variabl théorème des valeurs intermédiaires, existence d'un point où f est maximum sur un fermé borné de $\mathbb{R}^n$

I Généralités sur les ensembles et les applications

1 Ensemble :

Définition : Un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont appelés les éléments de cet ensemble

Exemples : Les titres de la bourse de Paris, les électeurs de la présidentielle française de mai 2017, les habitants de la planète terre.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est l'ensemble des quotients d'entiers relatifs

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est à dire les nombres donnés par un développement décimal

<u>Notation</u> : Nous convenons qu'il existe un unique ensemble sans élément. Cet ensemble est appelé ensemble vide et noté $\emptyset$.

<u>Notation $a \in A$</u> : Soit A un ensemble et a un élément de A. $a \in A$ se lit a appartient à A et signifie que a est un élément de A. $b \notin A$ se lit b n'appartient pas à A et signifie que b n'est pas un élément de A.

<u>Définition (sous-ensemble)</u> Soit A et B deux ensembles. B est dit sous-ensemble de A si tout élément de B est un élément de A

<u>Notation $B \subset A$</u> : Soit A et B deux ensembles, $B \subset A$ se lit B inclus dans A et signifie que B est un sous-ensemble de A.

<u>Exemples</u> : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\{-\frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}\}$ est un ensemble formé des trois nombres rationnels $-\frac{1}{2}$, 3 et $\frac{4}{5}$: $\{-\frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}\} \subset \mathbb{Q}$.

Notons $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \geqslant 0\}$ $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant 0\}$ et $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0\}$

Les trois ensembles $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^*$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Le CAC 40 (Cotation Assistée en Continu) est un indice de la bourse de Paris déterminé à partir de 40 titres de cette bourse. Ces 40 titres constituent un sous-ensemble des titres de la bourse de Paris.

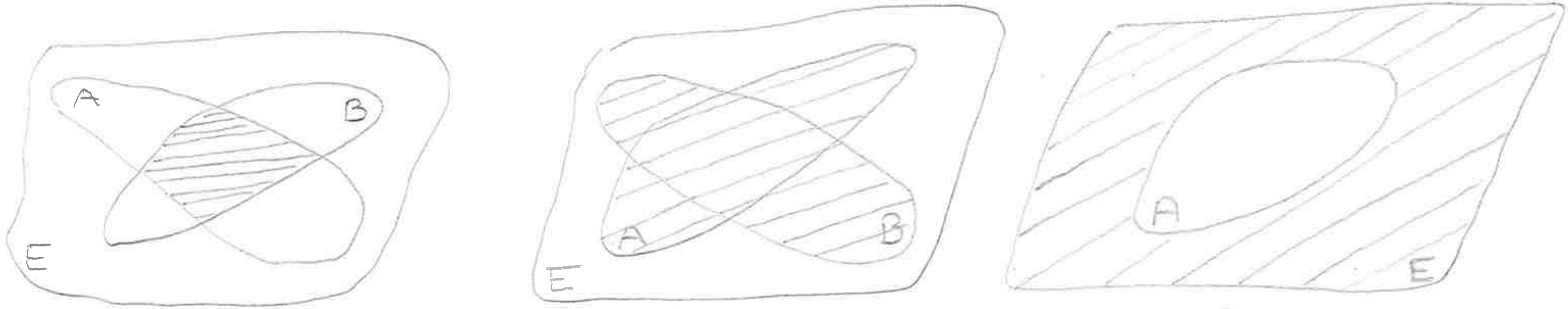
2 Opérations sur les ensembles

Définition : Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E

1) L'intersection de A et B est le sous-ensemble de E noté $A \cap B$ défini par $A \cap B = \{x \in E \text{ tels que } x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Autrement dit, $A \cap B$ est le sous-ensemble de E formé des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.

2) La réunion (ou l'union) de A et B est le sous-ensemble de E noté $A \cup B$ défini par $A \cup B = \{x \in E \text{ tels que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Autrement dit, $A \cup B$ est le sous-ensemble de E formé des éléments de E qui sont dans A ou qui sont dans B. Il s'agit du ou inclusif : l'un, l'autre ou les deux à la fois ...

3) Le complémentaire de A dans E, noté $E - A$ ou $C_E A$, est défini par $E - A = \{x \in E$ tels que x n'appartient pas à $A\}$
Autrement dit, c'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.



$A \cap B$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $E - A$

Un ensemble E est dit fini s'il comporte un nombre fini d'éléments. Ce nombre d'élément est appelé le cardinal de E, noté card(E).

<u>Formule</u> : Si A et B ont un nombre fini d'éléments, il en est de même de $A \cup B$ et $A \cap B$. Nous avons de plus

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

<u>Formule</u> : Si E a un nombre fini d'éléments, il en est de même de tout sous-ensemble de E. Nous avons alors

$$\text{card}(E - A) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

<u>Exemple</u> : $B = \{-6, -4, -2, 1, 3\} \subset \mathbb{Z}$

$A = \{-4, 1, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}$

$A \cap B = \{-4, 1\}$ $\quad A \cup B = \{-6, -4, -2, 1, 3, 5, 7\}$

$\text{card}(A) = 4 \quad \text{card}(B) = 5 \quad \text{card}(A \cap B) = 2 \quad \text{card}(A \cup B) = 7$

Nous avons bien : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

<u>Définition</u> : Si E et F désignent deux ensembles, nous appelons produit cartésien de E et de F, l'ensemble noté $E \times F$ dont les éléments sont la donnée d'un couple formé de la donnée d'un élément de E, puis d'un élément de F.

$$E \times F = \{(e, f) \text{ tels que } e \in E \text{ et } f \in F\}$$

Si E et F ont un nombre fini d'éléments, $E \times F$ aussi et

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}\, E \times \text{card}\, F.$$

3 Applications entre ensembles

Définitions : Soit X et Y deux ensembles. Une application f de X dans Y est un procédé qui à tout élément x de X associe un élément noté $f(x)$ de Y.

a) X est appelé l'ensemble source de f, la source de f ou encore l'ensemble de départ de f

b) Y est appelé l'ensemble but de f, le but de f ou encore l'ensemble d'arrivée de f

c) Si x est un élément de X, $f(x)$ est appelé l'image de x par f

d) Si y est un élément de Y et que x est un élément de X tel que : $f(x) = y$,

nous disons que x est un antécédent de y par f

Notons qu'un élément x de X n'a qu'une image par f et qu'un élément y de Y peut avoir aucun, un seul, plusieurs antécédents par f.

Le diagramme suivant caractérise f

Lorsqu'une application est donnée par un tel diagramme, l'image d'un élément x, s'obtient en suivant la flèche issue de x et les antécédents de $y \in Y$ en remontant les flèches arrivant en y.

Soit f une application de X vers Y. Nous notons que f est déterminée par les images des éléments de X, mais aussi par les antécédents des éléments de Y.

<u>Définition</u> : Soit X un ensemble. Nous appelons identité de X et notons Id_X l'application :
$Id_X : X \longrightarrow X$, définie par $Id_X(x) = x$ pour tout $x \in X$.

Notons qu'une application n'est donnée de façon complète que si nous connaissons son ensemble source, son ensemble but et le procédé de transformation

$f : X \longrightarrow Y \quad x \longmapsto f(x) = \dots$

désigne une application d'ensemble source X, d'ensemble but Y qui à un élément de X associe l'élément $f(x)$ de Y défini par ...

Donnons quelques exemples :

a) Ainsi, si $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls, l'application : $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = 1 - 3x$ désigne l'application d'ensemble source $\mathbb{R}^+$, d'ensemble but $\mathbb{R}$ qui à un réel positif ou nul x associe $f(x) = 1 - 3x$.

<u>L'image de 3 par f</u> est $f(3) = 1 - 3 \times 3 = -8$

<u>Quels sont les antécédents de -1 par f</u> ? Ceux sont les x réels positifs ou nuls tels que $1 - 3x = -1$. Nous avons ainsi à résoudre :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ 1 - 3x = -1 \end{cases} ?$$

$\begin{cases} x \geqslant 0 & x \in \mathbb{R}\ ? \\ -3x = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0 & x \in \mathbb{R}\ ? \\ 3x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0 & x \in \mathbb{R}^+ \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

La valeur -1 a un seul antécédent par f : $x = \frac{2}{3}$.
Par contre, nous pouvons vérifier que 3 n'a pas d'antécédent par f.

b) Soit X l'ensemble des produit d'un commerce. L'application $p : X \to \mathbb{R}$ qui à un produit x de ce commerce associe son prix $p(x)$ en euros. Soit y un réel, les antécédents de y par l'application p sont les produits du commerce de prix y. Suivant y, y peut avoir par l'application p : pas d'antécédent, un seul antécédent, plusieurs antécédents

c) Si X et Y sont des ensemble ayant peu d'éléments, un simple diagramme donne une application de X vers Y.
Prenons par exemple : $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $Y = \{a, b, c, d, e\}$
et $f : X \to Y$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = d$ $f(3) = a$ $f(4) = e$

4) Composition des applications

<u>Définition</u> : Soit A, B, C trois ensembles, $f : A \to B$ une application de A vers B, $g : B \to C$ une application de B vers C. Nous appelons composée de g par f, l'application notée $g \circ f$:
$g \circ f : A \longrightarrow C$ définie par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour tout $a \in A$.

Moralité pour avoir l'image de a par $g \circ f$, nous commençons par transformer a par f : nous obtenons $f(a)$. Puis, nous transformons $f(a)$ par g : nous obtenons $g(f(a))$ qui est par définition l'image de a par $g \circ f$

L'application composée $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble source de g est égal à l'ensemble but de f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad a \longmapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Nous noterons que $g \circ f$ et $f \circ g$ peuvent être défini par exemple si $A = B = C$ sans être égales

Exemple : Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto f(x) = 2 - 3x$ $\qquad$ $x \longmapsto g(x) = x^2 + 2$

Alors $g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie pour $x \geqslant 0$ par

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2 - 3x) = (2 - 3x)^2 + 2 = 4 + 9x^2 - 12x + 2$

soit $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 12x + 6$

Exemple : Soit $\mathbb{R} - \{2\}$ les réels distincts de 2.

$u : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto u(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ $\qquad$ $x \longmapsto v(x) = 2x - 3$

$v \circ u : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour x réel distinct de 2 par

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v\left(\frac{2x - 1}{x - 2}\right) = 2\left(\frac{2x - 1}{x - 2}\right) - 3$$

$$= \frac{4x - 2}{x - 2} - 3 = \frac{4x - 2}{x - 2} - \frac{3x - 6}{x - 2} = \frac{4x - 2 - 3x + 6}{x - 2} = \frac{x + 4}{x - 2}$$

Ainsi $v \circ u : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto (v \circ u)(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$.

5) Application injective, surjective, bijective

Définition (injection, surjection, bijection) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1) Si tout élément de Y a 0 ou 1 antécédent par f, f est dite injective

2) Si tout élément de Y a $\geqslant 1$ antécédents par f, f est dite surjective

3) Si tout élément de Y a exactement 1 antécédent par f, f est dite bijective

Ainsi, une application est dite bijective si elle est injective et surjective

Rappelons que si y est un élément de Y, les antécédents de y par f sont les $x \in X$ tels que $f(x) = y$. Ainsi, savoir si f est injective, surjective ou bijective revient à savoir compter pour tout y élément de Y, le nombre de solutions des équations :

$$x \in X \ ? \quad f(x) = y .$$

1) <u>f est injective</u>, si pour tout y dans Y, le nombre de x dans X satisfaisant $f(x) = y$ est inférieur ou égal à 1
2) <u>f est surjective</u>, si pour tout y dans Y, le nombre de x dans X satisfaisant $f(x) = y$ est supérieur ou égal à 1
3) <u>f est bijective</u>, si pour tout y dans Y, le nombre de x dans X satisfaisant $f(x) = y$ est exactement un.

Attention aux négations :
1') f <u>n'est pas injective</u> s'il existe y dans Y ~~tel~~ que l'équation $x \in X$, $f(x) = y$ ait > 1 solution.
2') f <u>n'est pas surjective</u> s'il existe y dans Y tel que l'équation $x \in X$, $f(x) = y$ n'ait pas de solution
3') f <u>n'est pas bijective</u> s'il existe y dans Y tel que l'équation $x \in X$, $f(x) = y$ n'ait pas une unique solution

<u>Définition</u> Soit $f : X \to Y$ une application bijective. Nous appelons application inverse ou réciproque de f, l'application notée : $f^{-1} : Y \to X$ telle que pour y élément de Y, $f^{-1}(y)$ soit l'antécédent de y par f (qui est unique, car f est supposée être une bijection)

<u>Exemple 1</u> : Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = -5x + 9$$

est bijective. Déterminer son application inverse f^{-1}.

<u>Solution</u> : Soit y un nombre réel (c'est à dire y dans l'ensemble but de f), cherchons x un nombre réel (c'est à dire x dans l'ensemble source de f tel que $f(x) = y$

ou encore $-5x + 9 = y$

ou encore $-5x = y - 9$

Une unique valeur de x convient : $x = \dfrac{y-9}{-5}$.

Ainsi, f est bijective et l'application inverse est

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y \longmapsto f^{-1}(y) = \dfrac{y-9}{-5}$

Exemple 2 Nous considérons l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \qquad x \longmapsto f(x) = \frac{x-3}{x-2}.$$

a) Montrer que f est définie.

b) Puis, montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution de a : Soit x un élément de $\mathbb{R}-\{2\}$ (c'est à dire x un réel distinct de 2), $x-2$ est alors non nul et donc $\frac{x-3}{x-2}$ est un réel. Si ce réel est égal à 1 :

$$\frac{x-3}{x-2} = 1 \quad , \quad x-3 = x-2 \quad , \quad -3 = -2 \quad \text{impossible.}$$

Donc, si x est un élément de $\mathbb{R}-\{2\}$, $\frac{x-3}{x-2}$ est un réel différent de 1 donc un élément de $\mathbb{R}-\{1\}$. L'application f est donc définie.

Solution de b : Soit y un élément de $\mathbb{R}-\{1\}$ (c'est à dire un réel distinct de 1). Cherchons les x éléments de $\mathbb{R}-\{2\}$ (c'est à dire les réels x distincts de 2) tels que

$$f(x) = y$$

Donc, cherchons $x \neq 2$: $\dfrac{x-3}{x-2} = y$

Cherchons $x \neq 2$: $x - 3 = y(x-2)$
cherchons $x \neq 2$: $x - 3 = yx - 2y$
Le réel y étant fixé, nous reconnaissons une équation du premier degré en x.
Nous avons donc à chercher $x \neq 2$: $x - yx = -2y + 3$
Nous avons donc à chercher $x \neq 2$: $x(1-y) = -2y+3$
Comme y est supposé différent de 1, nous avons à chercher
$x \neq 2$: $x = \dfrac{-2y+3}{1-y}$

Or si $\dfrac{-2y+3}{1-y} = 2$, nous aurions : $-2y+3 = 2(1-y)$
Donc, $-2y+3 = 2-2y$. Donc : $3=2$ impossible

Ainsi, nous avons montré que pour tout réel $y \neq 1$, il existe un unique $x \neq 2$ tel que $f(x) = y$. Cette valeur de x
est $x = \dfrac{-2y+3}{1-y}$
L'application f est donc bijective et l'inverse est

$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \qquad y \longmapsto f^{-1}(y) = \dfrac{-2y+3}{1-y}$

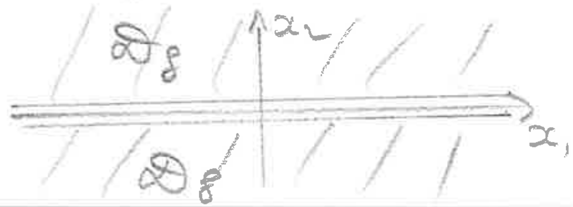
Définition : Soit X et Y deux ensembles. Une fonction de X dans Y est un procédé qui à certains éléments de X associe un élément noté $f(x)$ de Y.

Les éléments x de X auxquels auxquels, nous associons un élément $f(x)$ constituent l'ensemble de définition de f (parfois noté $\mathcal{D}_f$)

Exemple : Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$. Le domaine de définition de f est

$\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_2 \neq 0\}$.

Les coordonnées (x_1, x_2) d'un point M sont dans $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $x_2 \neq 0$. Donc, si M est en dehors de la droite d'équation $x_2 = 0$ (c.a.d en dehors de l'axe des x_1)



II $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels

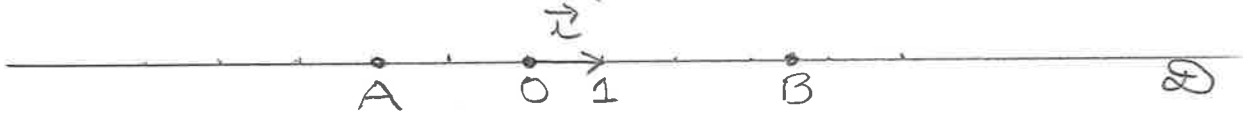
Si un commerce dispose de 17 produits, notons x_1 le prix du produit 1, x_2 le prix du produit 2, ..., x_{17} le prix du produit x_{17}. La donnée de ces 17 nombres est un élément noté $(x_1, x_2, \dots, x_{17})$ appelé 17-uplet de réels.

Définition : Soit n un entier. Un n-uplet de réel est la donnée de n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$. Cet élément est noté $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nous notons $\mathbb{R}^n$ l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets de réels.

Bien sur $\mathbb{R}^1$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Un 2-uplet de réels est aussi appelé un couple. Prendre garde que l'ordre a de l'importance les couples $(2, -1)$ et $(-1, 2)$ sont différents. Un 3-uplet de réels est aussi un triplet de réels

1) Représentation géométrique d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O,\vec{\imath})$. Nous savons définir l'abscisse d'un point de $\mathcal{D}$. Par exemple



Le point A a pour abscisse -2 dans le repère $(O,\vec{\imath})$ de $\mathcal{D}$
B ———— 3,5 ————

Considérons alors l'application :

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}$ $\quad x \longmapsto$ le point M d'abscisse x dans le repère $(O,\vec{\imath})$ de $\mathcal{D}$.

Cette application est une bijection qui identifie les réels aux points de la droite $\mathcal{D}$. Représenter un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, c'est dessiner les points de la droite d'abscisses les réels de A.

Soit $a < b$ deux réels : Nous notons $]a, b[$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des réels strictement compris entre a et b. Il est appelé intervalle ouvert a, b.

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b\}$

De même, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des réels compris au sens large entre a et b est noté $[a, b]$. Il est appelé intervalle fermé a, b.

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b\}$.

D'autres intervalles sont définis :

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x\}$ ...

<u>Définition :</u> Si x est un réel, nous appelons valeur absolue de x le nombre réel positif noté $|x|$ défini par :

$|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

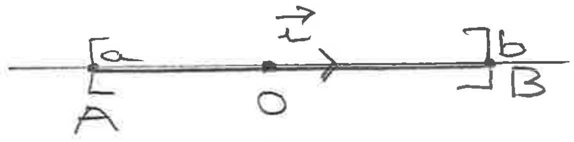
<u>Exemple :</u> $|17| = 17$ et $|-3| = 3$.

Soit $a < b$ deux réels. $\mathcal{D}$ une droite de repère $(O, \vec{\imath})$

A le point d'abscisse a sur $\mathcal{D}$, B le point d'abscisse b sur $\mathcal{D}$. Le segment AB représente l'intervalle fermé $[a, b]$:

Le segment AB est l'ensemble des points d'abscisse x pour x décrivant $[a, b]$

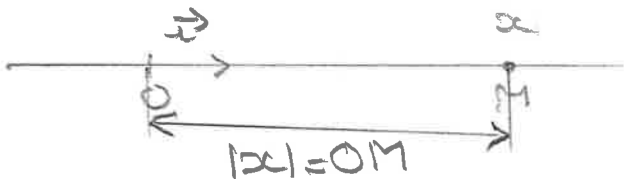
$[a, b]$ $\longrightarrow$ représentation géométrique



L'intervalle ouvert $]a, b[$ est représenté par le segment AB privé de ses extrémités

Si M désigne le point d'abscisse x sur $\mathcal{D}$. La valeur absolue de x n'est autre que OM la distance de O à M

$|x| = OM$

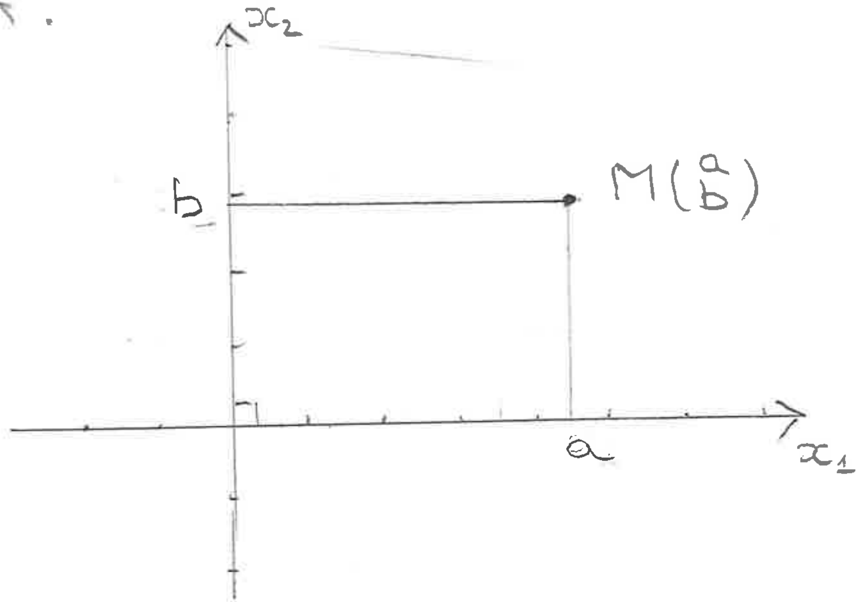


2) Représentation géométrique d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Considérons l'application :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto \text{le point } M \text{ de } \mathcal{P} \text{ de coordonnées } (x_1, x_2)$$

Cette application est une bijection qui identifie les couples de réels aux points du plan $\mathcal{P}$. Représenter un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$, c'est dessiner les points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x_1, x_2) sont des éléments de A.



$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto$ Le point M de coordonnées (a, b)

Exemple : Soit B l'ensemble des couples de réels (x_1, x_2) tels que $x_2 = \frac{1}{3} x_1 + 1$:

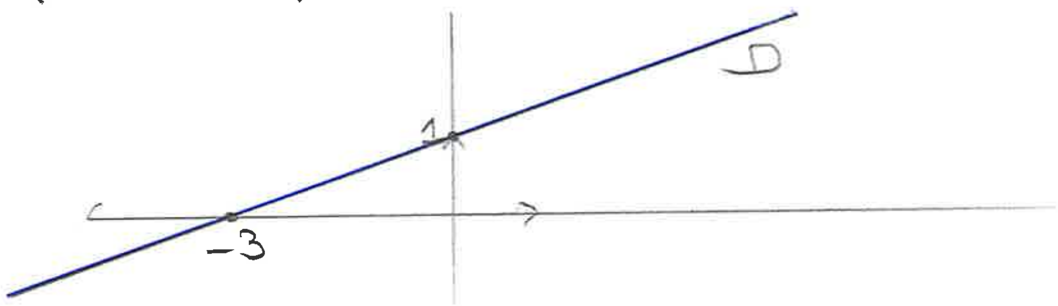
$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_2 = \frac{1}{3} x_1 + 1\}$$

Nous savons que la représentation de B est une droite

$1 = \frac{1}{3} \cdot 0 + 1$ donc $(0, 1) \in B$

$0 = \frac{1}{3}(-3) + 1$ donc $(-3, 0) \in B$

Ainsi, la représentation géométrique de B est la droite D passant par les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(-3, 0)$



D est dite la droite d'équation $x_2 = \frac{1}{3} x_1 + 1$

Soit a, b, c trois réels, en micro-économie il est souvent demandé de représenter les couples de réels (x_1, x_2) vérifiant la relation $a x_1 + b x_2 = c$

Le résultat suivant généralise l'exemple précédent :

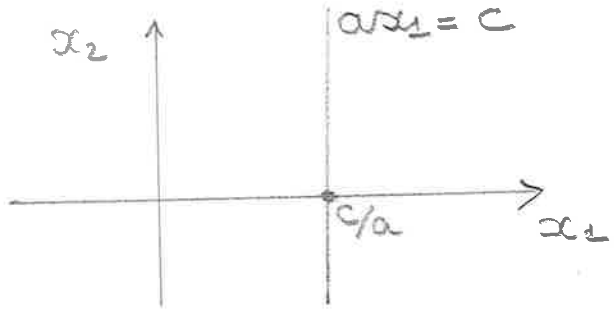
__Proposition :__ Fixons trois réels a, b, c tels que a et b ne soient pas simultanément nuls. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formés des couples de réels (x_1, x_2) vérifiant la condition $ax_1 + bx_2 = c$:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } ax_1 + bx_2 = c\} \subset \mathbb{R}^2$$

La représentation de ce sous-ensemble est une droite dite droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$

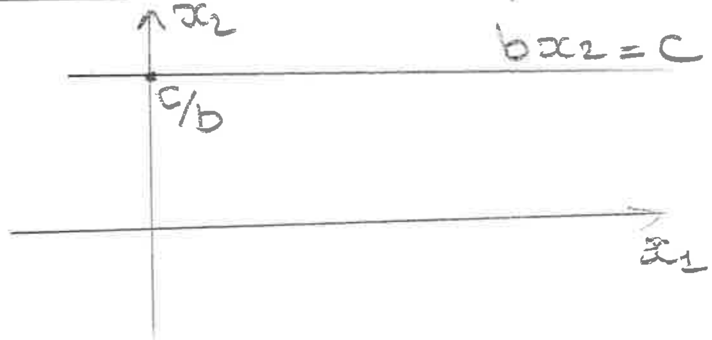
Détaillons suivant les valeurs de a, b, c la représentation de cette droite

__$b = 0$__ : Droite d'équation $ax_1 = c$



__droite verticale__

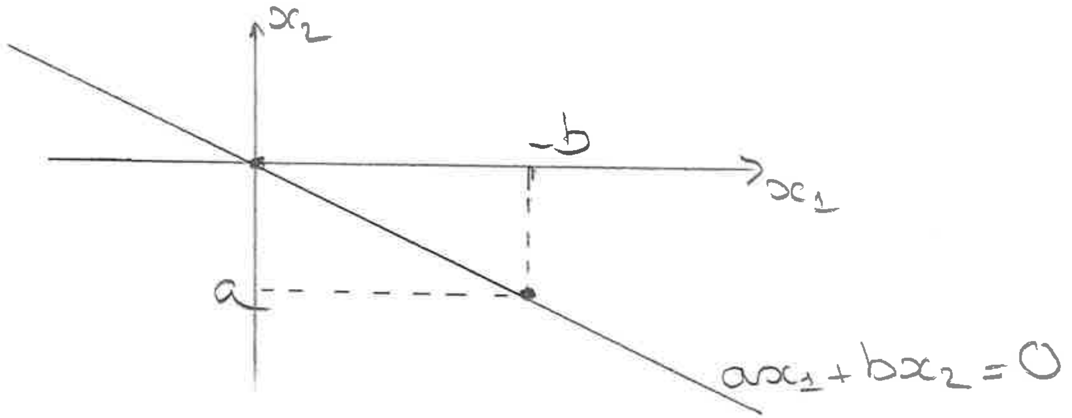
__$a = 0$__ : Droite d'équation $bx_2 = c$



__droite horizontale__

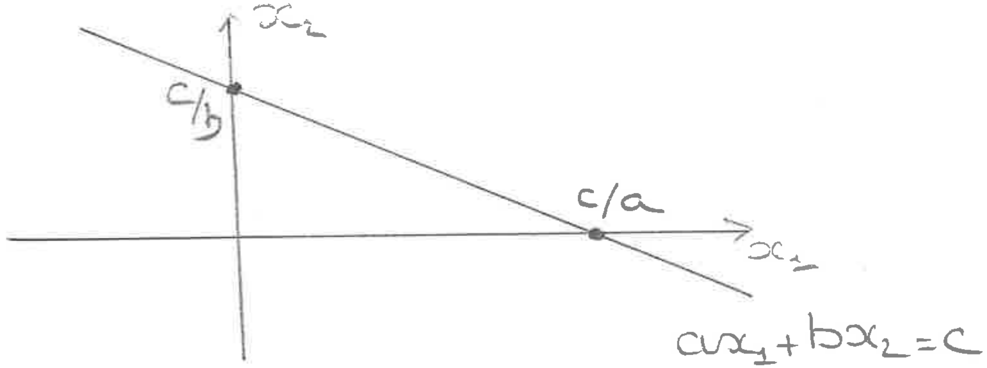
<u>cas $c = 0$</u> : Droite d'équation $ax_1 + bx_2 = 0$

$a0 + b0 = 0$ Cette droite passe par l'origine de coordonnées $(0,0)$
$a(-b) + ba = 0$ — par le point de coordonnées $(-b, a)$



<u>droite passant par l'origine</u>

<u>cas a, b, c non nuls</u> : Droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$
$a \frac{c}{a} + b\,0 = c$ Cette droite passe par le point de coordonnées $(\frac{c}{a}, 0)$
$a\,0 + b\frac{c}{b} = 0$ Cette droite passe par le point de coordonnées $(0, \frac{c}{b})$



<u>droite coupant les axes de coordonnées en 2 points distincts</u>

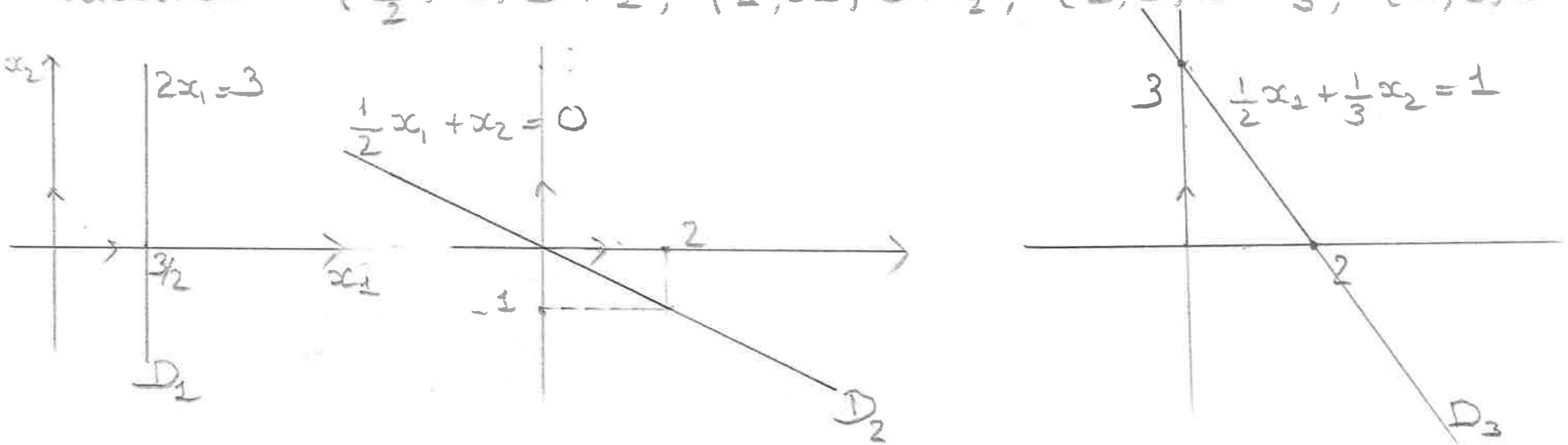
Exercices : Représenter géométriquement :

a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x_1 = 3\} = A_1 \subset \mathbb{R}^2$

b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0\} = A_2 \subset \mathbb{R}^2$

c) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1\} = A_3 \subset \mathbb{R}^2$

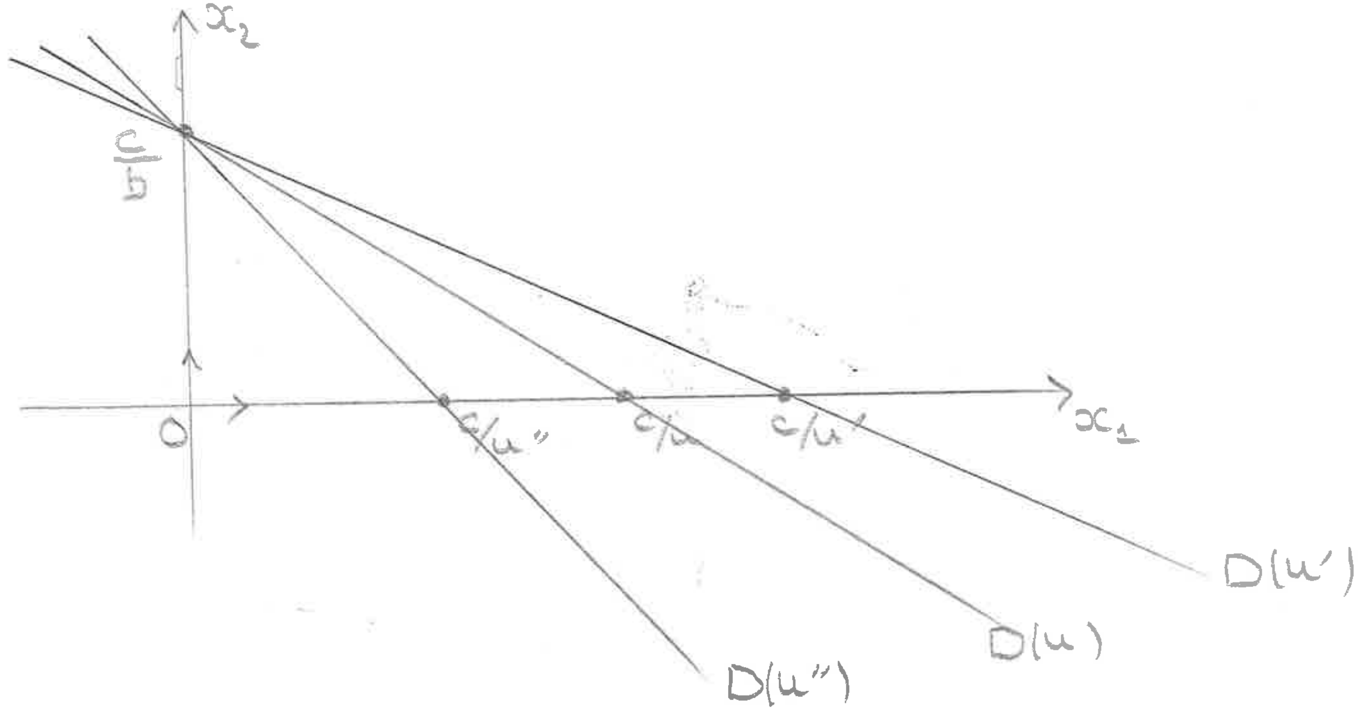
Notons D_1, D_2, D_3 les représentations géométriques de A_1, A_2, A_3. Ceux sont des droites. D_1 est parallèle à l'axe des x_2, D_2 passe par l'origine, D_3 coupe les axes de coordonnées en deux points distincts. $(\frac{3}{2}, 0) \in A_1$, $(2,-1) \in A_2$, $(2,0) \in A_3$, $(0,3) \in A_3$



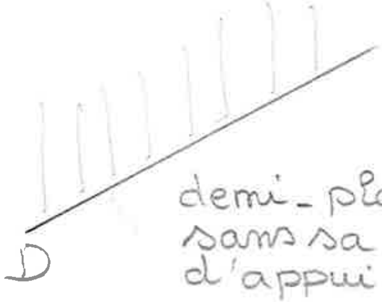
<u>Exemple de variation des coefficients</u> : Fixons $b>0$ et $c>0$ deux réels. Soit $u>0$ un réel. Considérons les droites d'équations

$D(u)$: $ux_1 + bx_2 = c$

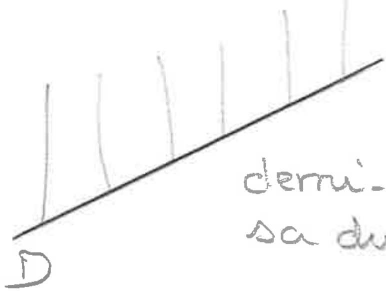
Pour tout u, le couple de réels $(0, \frac{c}{b})$ vérifie cette équation. Ainsi, les représentations géométrique de toutes ces droites passent par le point de coordonnées $(0, \frac{c}{b})$. Ainsi si $0 < u' < u < u''$ la position relative des droites $D(u')$, $D(u)$, $D(u'')$ est donnée par le dessin :



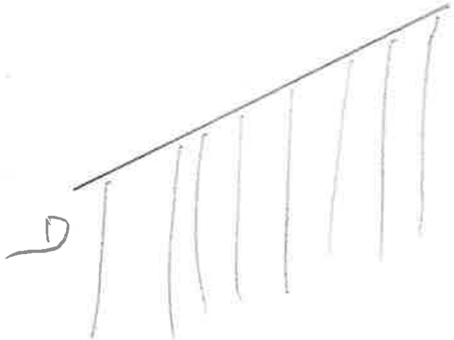
Soit P un plan géométrique. Une droite D du plan définit <u>quatre demi-plans</u> : les points situés d'un coté de D et pas sur la droite D, d'un coté de D et éventuellement sur la droite D. La droite D est appelée droite d'appui du demi-plan.



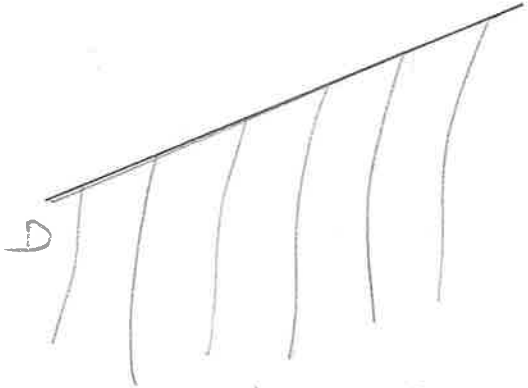
demi-plan sans sa droite d'appui



demi-plan avec sa droite d'appui



demi-plan sans sa droite d'appui



demi-plan avec sa droite d'appui

<u>Proposition :</u> Soit a, b deux réels non simultanément nuls et soit c un réel

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 > c\} \subset \mathbb{R}^2$

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 < c\} \subset \mathbb{R}^2$

sont représentés géométriquement par les demi-plans des points situés strictement du même coté de la droite D d'équation $ax_1 + bx_2 = c$.
Ils sont appelés respectivement demi-plans d'équation $ax_1 + bx_2 > c$ et d'équation $ax_1 + bx_2 < c$.

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 \geqslant c\} \subset \mathbb{R}^2$

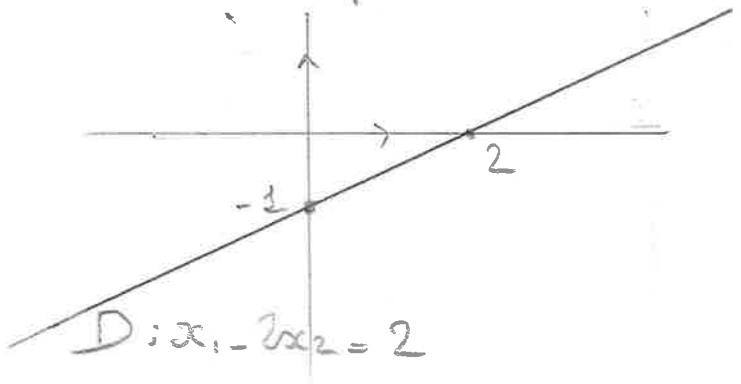
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 \leqslant c\} \subset \mathbb{R}^2$

sont représentés géométriquement par les demi-plans des points situés du même coté de D (c.a.d éventuellement sur D).
Ils sont dits respectivement d'équations $ax_1 + bx_2 \geqslant c$ et $ax_1 + bx_2 \leqslant c$.

Exercice Représenter géométriquement

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - 2x_2 > 2\}$

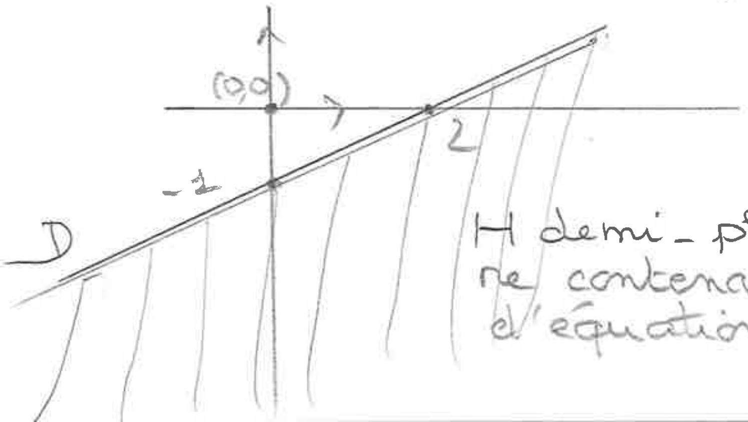
Solution : Il s'agit d'un demi-plan délimité par la droite D d'équation $x_1 - 2x_2 = 2$. Cette droite coupe les axes de coordonnées en les points de coordonnées $(2,0)$ et $(0,-1)$.



Par exemple, le point de coordonnée $(0,0)$ n'appartient pas à D et

$0 - 2 \times 0 = 0 < 2$

Donc, si H est la représentation géométrique du demi-plan A, le point de coordonnée $(0,0)$ n'appartient pas à A. H est donc l'ensemble situés strictement d'un même coté de D ne contenant pas le point de coordonnée $(0,0)$

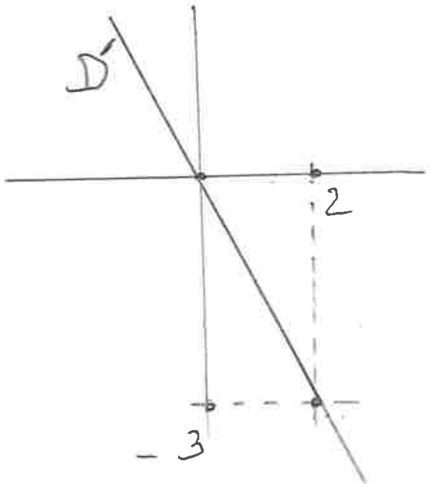


H demi-plan délimité par D ne contenant pas D d'équation $x_1 - 2x_2 > 2$

Exercice : Représenter géométriquement

$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \leq 0\}$

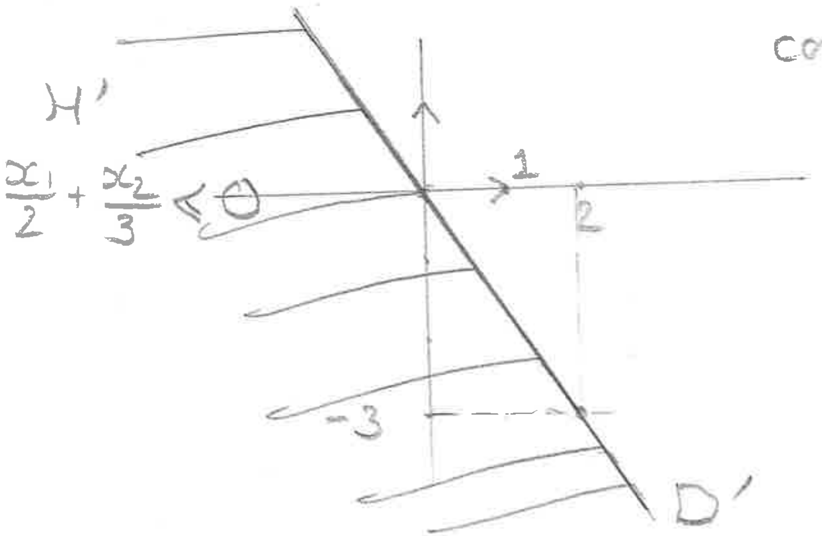
<u>Solution</u> : Il s'agit d'un demi-plan délimité par la droite D' d'équation $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 0$. D' passe par l'origine (point de coordonnées (0,0)) et par le point de coordonnée (2, -3).



Le point de coordonnée (1,0) n'appartient pas à D'

$\frac{1}{2} + \frac{0}{3} = \frac{1}{2} > 0$

Notons H' la representation géométrique de B :
Le point de coordonnée (1,0) n'est pas dans H'
Ainsi H' est le demi-plan des points situés d'un même coté de D au sens large et ne contenant pas le point de coordonnée (1,0)



3) Opérations naturelles sur les n-uplets de réels

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$

<u>addition de deux n-uplets de réels</u> : La somme des n-uplets x et y est un n-uplet noté $x+y$ défini par :

$$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

<u>produit d'un n-uplet par un réel</u> : Le produit du n-uplet x par le réel a est un n-uplet noté ax défini par :

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

<u>opposé d'un n-uplet</u> : L'opposé du n-uplet x est le n-uplet noté $-x$ défini par :

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (-1)x$$

<u>différence de deux n-uplets de réels</u> : La différence des n-uplets x et y est le n-uplet $x-y$ défini par :

$$x-y = (x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_n-y_n) = x + (-y).$$

<u>Remarque</u> : ces opérations sont naturelles. Donnons nous quatre produits de respectivement 100, 72, 17 et 22 euros. La liste des prix de ces quatre produits est $a = (100, 72, 17, 22) \in \mathbb{R}^4$

i) Supposons que ces prix augmentent de 1, 3, 2 et 4 euros. La liste des augmentations des prix de ces produits est $b = (1, 3, 2, 4)$. La liste des nouveaux prix est

$$(101, 75, 19, 26) = a + b$$

ii) Supposons que nous offrons une réduction de 10/100 sur nos quatre produits de prix 100, 72, 17 et 22. Les réductions sur ces produits sont 10, 7.2, 1.7 et 2.2. La liste de ces réductions est

$$r = (10, 7.2, 1.7, 2.2) = \frac{10}{100} a = 0.1 a$$

La liste des prix de nos quatre produits après réduction

$$(90, 64.8, 15.3, 19.8) = a - r = a - 0.1 a = 0.9 . a$$

4) Distance de 2 n-uplets de réels, ouverts, fermés et bornés de $\mathbb{R}^n$

Définition : Soit $x = (x_1, .., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$ deux n-uplets de réels. Nous appelons distance de x à y le réel noté $d(x,y)$ défini par :

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots (y_n - x_n)^2}$$

Nous appelons norme de x, le réel noté $\|x\|$ défini par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Nous constatons que $d(x,y) = \|y - x\|$.

Exemple : $x = (2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ $y = (-1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$

$$d(x,y) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-(-3))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9 + 9 + 1} = \sqrt{19}$$

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

Si $u_1, .., u_n$ sont n réels, notons $\max\limits_{i \in \{1,2,..,n\}} (u_i)$ le plus grand des $u_1, u_2, .., u_n$. Nous avons alors

$$|y_i - x_i| \leqslant \max_{i \in \{1,2,..,n\}} (|y_i - x_i|) \leqslant d(x,y) \leqslant n \max_{i \in \{1,2,..,n\}} (|y_i - x_i|)$$

Ainsi, dire que $d(x,y)$ est petit est équivalent à $\max\limits_{i\in\{1,2,..,n\}}(|y_i - x_i|)$ est petit.

De même, $|x_i| \leqslant \max\limits_{i\in\{1,2,..,n\}} |x_i| \leqslant \|x\| \leqslant n \max\limits_{i\in\{1,2,..n\}} |x_i|$. Donc dire que $\|x\|$ est petit revient à dire que $\max\limits_{i\in\{1,2,..,n\}} |x_i|$ est petit.

<u>Définition :</u> Soit $r>0$ un réel et $a=(a_1,a_2,..,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Nous appelons boule (ouverte) de centre a et de rayon r le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ noté $B(a,r)$ défini par

$$B(a,r)=\{x=\{x_1,..,x_n\}\in\mathbb{R}^n \text{ tels que } d(a,x)<r\}$$

<u>Définition :</u> Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Nous disons que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $a=(a_1,..,a_n)\in U$ il existe $r>0$ un réel tel que $B(a,r)\subset U$.

Pour se faire une idée de cette définition, appelons point voisin de $a=(a_1,..,a_n)\in\mathbb{R}^n$ les points de $B(a,r)$ boule (ouverte) de centre a et de rayon r. La définition devient :

Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si quand il contient un point a il contient les points voisins

<u>Définition</u> : Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Nous disons que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n - F$ le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

<u>Définition</u> : Soit G un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Nous disons que G est borné dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in G$, $\|x\| < M$

Nous pouvons notons que dire que G est borné revient à dire que G est contenu dans une boule de $\mathbb{R}^n$. Ou encore qu'il existe un reel $M' > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, .., x_n) \in G$ nous ayons $|x_1| < M'$, .., $|x_n| < M'$.

Si $B_1, .., B_p$ sont des sous-ensembles d'un ensemble B notons $B_1 \cup B_2 \cup .. \cup B_p = \{ b \in B$ tels que b appartient au moins à l'un des $B_i \}$.
Ce sous-ensemble de B est appelé la reunion des B_i

de même $B_1 \cap B_2 \cap .. \cap B_p = \{b \in B$ tels que b appartient à tous les $B_i\}$
Ce sous-ensemble est appelé intersection des B_i

<u>proposition</u> : Les reunions et intersections d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Même ennoncé pour les fermés de $\mathbb{R}^n$. Même ennoncé pour les bornés de $\mathbb{R}^n$.

<u>proposition</u> : Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non tous nuls et a un réel.

$\{x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\{x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\{x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$
$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$
$\{x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$

<u>proposition</u> : $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble constitué d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est un fermé. L'ensemble des éléments distincts d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

5) Illustration : distance, ouverts, fermés, bornés

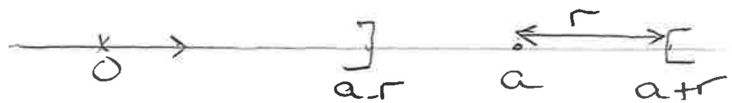
5.1 : $n = 1$ Soit x, y deux réels. La distance de x à y est le réel $d(x,y) = |y - x|$.

Soit $r > 0$ un réel, a un réel. La boule $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } d(x,a) < r \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x - a| < r \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } -r < x - a < r \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } a - r < x < a + r \} \end{aligned}$$

Ainsi, $B(a,r)$ est l'intervalle : $B(a,r) =]a-r, a+r[\, \subset \mathbb{R}$

Sa représentation géométrique est :



En conséquence, un sous-ensemble de réel est ouvert si quand il contient un point il contient un ~~petit~~ intervalle centré en ce point

<u>Liste des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$:</u>

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$, $]a, b[$

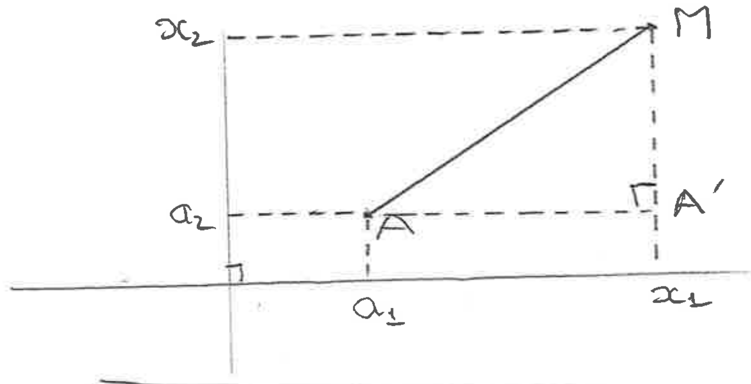
Rappelons que les reunions d'ouverts sont ouverts. En conséquence
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ est ouvert
$\mathbb{R} - \{17\} =]-\infty, 17[\cup]17, \infty[$ est ouvert

<u>Liste des intervalles fermés de $\mathbb{R}$</u>

$\mathbb{R}$, $]-\infty, a]$, $[b, +\infty]$, $[a, b]$, $\{a\}$

$]a, b[$, $[a, b]$, $\{a\}$ pour a, b réels sont les <u>intervalles bornés de $\mathbb{R}$</u>

5.2 : $n = 2$ Soit $a = (a_1, a_2)$ $x = (x_1, x_2)$ deux couples de réels
Notons A le point de coordonnées (a_1, a_2), M le point de coordonnées (x_1, x_2)

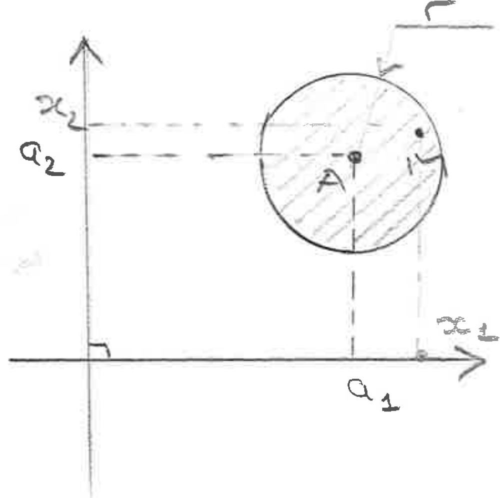


Le triangle AA'M est rectangle.
La longueur du coté AA' est $|x_1 - a_1|$,
celle du coté A'M est $|x_2 - a_2|$.
Suivant le théorème de Pythagorre
la longueur du coté AM est $AM = \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} = d(x, a)$

Ainsi, $d(x, A)$ n'est autre que la longueur du segment AM.
Soit $r > 0$ un réel

$$x \in B(a, r) \iff d(x, a) < r$$
$$\iff AM < r$$
$\iff$ La distance de M à A est strictement inférieur à M

La représentation géométrique de $B(a, r)$ est donc le disque de centre a de rayon r sans son bord



$B(a,r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$d(a,x) < r\}$

En conséquence un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est ouvert si et seulement si " lorsqu'un point A est dans sa représentation il en est de même d'un disque de centre A". Le rayon du disque dépend en général de A.

Remarquons que de l'égalité $AM = d(x,a)$ résulte que la représentation géométrique de
$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}$
est le cercle de centre A et de rayon r.
Nous disons que $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$ est une équation du cercle de centre A et de rayon r

III Fonctions numériques, généralités

1 Definition, exemples :

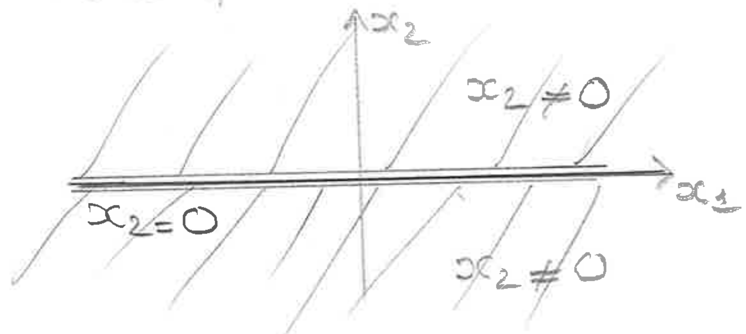
Par fonction numérique, nous entendrons dans ce cours une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ ... $(x_1, x_2, .., x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$ où X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemple : $X = \mathbb{R}^2$ $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$

Le réel $g(x_1, x_2)$ a un sens si $x_2 \neq 0$. Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_2 \neq 0\}$.

La droite d'équation $x_2 = 0$ est l'axe des x_1.

La représentation géométrique de $\mathcal{D}_g$ est donc les points du plan qui ne sont pas sur la droite d'équation $x_2 = 0$.



Nous pouvons distinguer des opérations sur les fonctions numériques. Soit donc $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions numérique et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>somme de f et g</u> : C'est la fonction numérique :

$$f+g : X \to \mathbb{R} \qquad (x_1,..,x_n) \mapsto (f+g)(x_1,..,x_n) = f(x_1,..,x_n) + g(x_1,..,x_n)$$

<u>produit par le réel λ</u> : c'est la fonction numérique :

$$\lambda f : X \to \mathbb{R} \qquad (x_1,..,x_n) \mapsto (\lambda f)(x_1,..,x_n) = \lambda \; f(x_1,..,x_n)$$

<u>produit de f par g</u> : c'est la fonction numérique

$$fg : X \to \mathbb{R} \qquad (x_1,..,x_n) \mapsto (fg)(x_1,..,x_n) = f(x_1,..,x_n)\, g(x_1,..,x_n)$$

<u>quotient de f par g</u> : c'est la fonction numérique

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{R} \qquad (x_1,..,x_n) \longmapsto \frac{f}{g}(x_1,..,x_n) = \frac{f(x_1,..,x_n)}{g(x_1,..,x_n)}$$

<u>Exemple</u> : $X = \mathbb{R}^2$, $\lambda = 17$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = x_1$, $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1,x_2) \mapsto g(x_1,x_2) = x_2$

$f+g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (f+g)(x_1,x_2) = x_1 + x_2$

$17f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (17f)(x_1,x_2) = 17x_1$

$fg : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (fg)(x_1,x_2) = x_1 x_2$

$\frac{f}{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$

Le domaine de définition de ces nouvelles fonctions peut se calculer à l'aide de celui de f et de g. Par exemple, le domaine de définition de $\frac{f}{g}$ est $\{(x_1,x_2)$ tels que $x_2 \neq 0\}$.

Par iteration, si $f_1, .., f_p$ sont p fonctions de $X \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$:
La somme de ces p fonctions est la fonction $f_1+f_2+\dots+f_p : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(f_1+f_2+\dots+f_p)(x_1,x_2,..,x_n) = f_1(x_1,x_2,..x_n) + f_2(x_1,..,x_n) + \dots + f_p(x_1,x_2,..,x_n)$$

De même, le produit de ces p fonctions est la fonction $f_1 f_2 .. f_p$ définie par

$$(f_1 f_2 \dots f_p)(x_1,x_2,..,x_n) = f_1(x_1,..,x_n) \dots f_p(x_1,..,x_n)$$

Definition : fonction monomiale : Soit n un entier, $i_1, i_2, .. i_n$ des entiers et a un réel. La fonction numérique
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (x_1, ..., x_n) \mapsto a\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$
est appelée fonction monomiale de n variables

fonction polynomiale : Nous appelons fonction polynomiale de n variables la somme d'un nombre fini de fonctions polynomiales de n variables

Exemples : a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -5x^3 + 4x - \frac{1}{3}$ est une fonction polynomiale d'une variable

b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1 x_2^3 x_3^2 - \frac{2}{3} x_1 x_3^2 + 9$
est une fonction polynomiale de 3 variables

c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto 7x^2 y z^3 - 9xyz + 5/2$
est une fonction polynomiale de 3 variables

Remarque : par convention ; nous posons $x_i^0 = 1$ pour tout x_i reel. Donc, $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 = 1$ pour $x_1, .., x_n$ reel. Donc, si a est reel $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (a_1, .., a_n) \mapsto a x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 = a$
est une fonction polynomiale

Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}^n$ sont donc des cas particuliers de fonctions polynomiales.

Nous pouvons montrer que des sommes finies de produits finis de fonctions polynomiales de n variables restent des fonctions polynomiales de n variables.

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^2 - 3x_1 x_2 x_3 + 1$ est une fonction polynomiale. Elle coïncide avec la fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 3x_1 x_2 x_3 + 1$

<u>Définition</u> : Nous appelons fonctions rationnelles de n variables le quotient de 2 fonctions polynomiales de n variables

<u>Exemple</u> : $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2 + x_1 x_2 - 2}{3x_1^3 x_2^4 - \frac{4}{3} x_1^2}$

est une fonction rationnelle de 2 variables. Son domaine de définition est $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x_1^3 x_2^4 - \frac{4}{3} x_1^2 \neq 0\}$

<u>Proposition :</u> Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de n variables. Soit c un réels.

a) Les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$

$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, .., x_n) > c \}$

$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, .., x_n) < c \}$

$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .. x_n) \neq c \}$

b) Les ensembles suivants sont des fermés de $\mathbb{R}^n$

$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, .., x_n) \geqslant c \}$

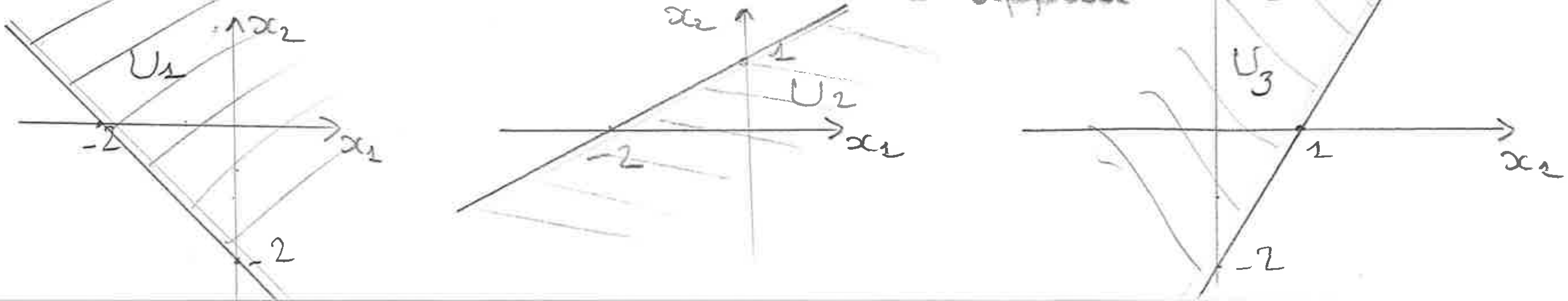
$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, .., x_n) \leqslant c \}$

$\{ (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, x_2, .., x_n) = c \}$

<u>Corollaires :</u> Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{R}^n$ sont définis sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$

Exercice : 1) Représenter le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$
$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 > -2$, $-\frac{1}{2}x_1 + x_2 < 1$ et $x_1 - \frac{1}{2}x_2 < 1\}$
2) Montrer que U est ouvert et borné
3) Représenter K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$
$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \geq -2$, $-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 1$ et $x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1\}$.
4) Montrer que K est fermé et borné

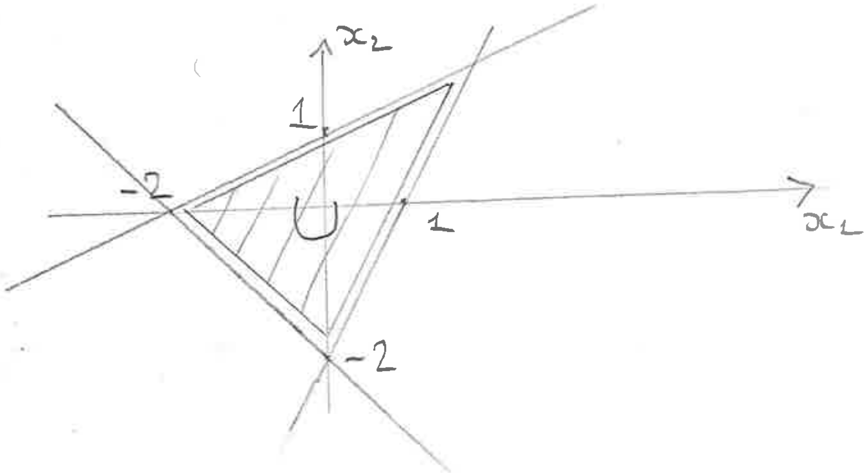
Solution : Considérons les demi-plans :
$U_1 : x_1 + x_2 > -2$, $U_2 : -\frac{1}{2}x_1 + x_2 < 1$, $U_3 : x_1 - \frac{1}{2}x_2 < 1$.
Les droites d'appui de ces demi-plans sont
$D_1 : x_1 + x_2 = -2$ $\quad D_2 : -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1$ $\quad D_3 : x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1$.
$(-2,0) \in D_1$, $(0,-2) \in D_1$ $\quad (-2,0) \in D_2$ $(0,1) \in D_2$ $\quad (1,0) \in D_3$ $(0,-2) \in D_3$
$(0,0) \in U_1$ $\quad (0,0) \in U_2$ $\quad (0,0) \in U_3$
Ainsi les demi-plans U_1, U_2, U_3 sont les demi-plans suivant ne comprenant pas leurs droites d'appui



$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, x_2) \in U_1, (x_1, x_2) \in U_2$ et $(x_1, x_2) \in U_3\}$

Donc, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$

U est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car est intersection d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.



U est représenté par le triangle de gauche sans ses cotés

U est donc contenu dans un disque de centre l'origine du repère et de rayon assez grand. Ainsi U est borné

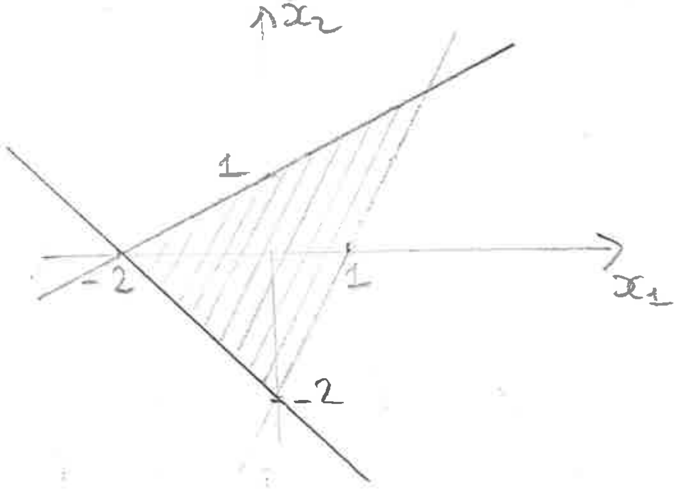
3) Considérons les demi-plans

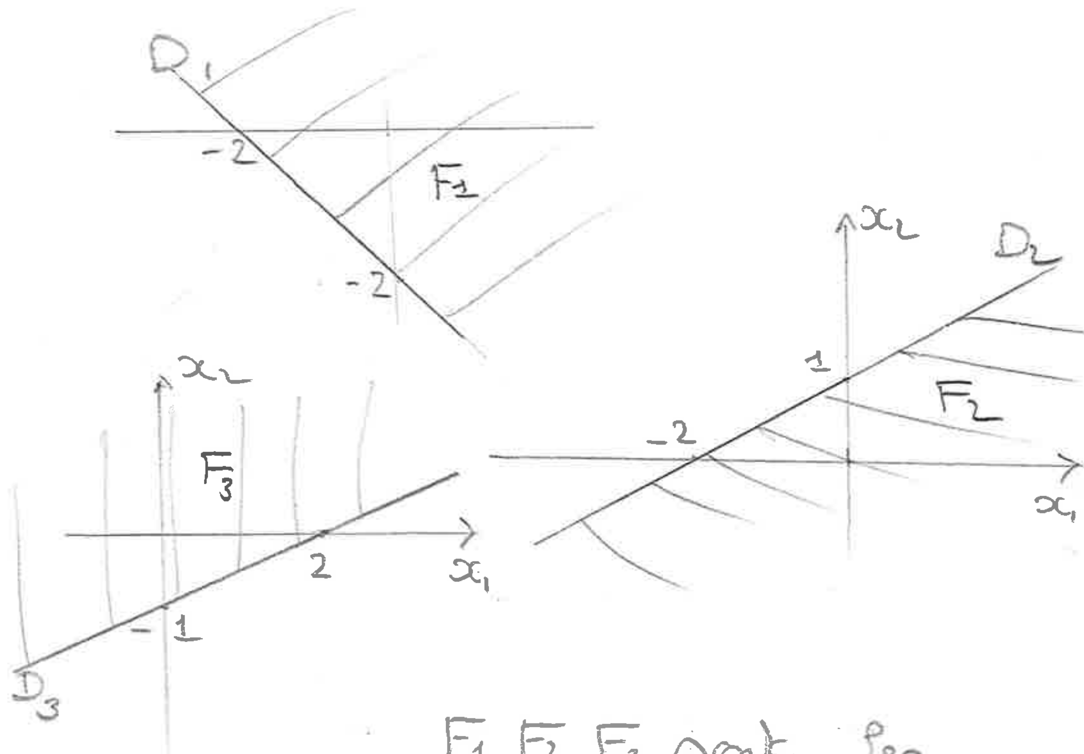
$F_1 : x_1 + x_2 \geqslant -2$, $F_2 : -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leqslant 1$, $F_3 : x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leqslant 1$

Les droites d'appui de ces demi-plans sont D_1, D_2 et D_3

$(0,0) \in F_1$, $(0,0) \in F_2$, $(0,0) \in F_3$

$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, x_2) \in F_1$, $(x_1, x_2) \in F_2$ et $(x_1, x_2) \in F_3\}$
$= F_1 \cap F_2 \cap F_3$





K est représenté par le triangle ci-dessus avec son bord

F_1, F_2, F_3 sont les demi-plans ci-dessus, ils contiennent leurs droites d'appui

4) K est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$
K est borné car contenu dans un disque par exemple de centre l'origine du repère et de rayon assez grand.

2) Limites et continuité de fonctions numériques

Dans ce paragraphe X désignera un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition</u> : Un n-uplet $a = (a_1, .., a_n)$ de réels est dit adhérent à X si pour tout $r > 0$ réel, la boule de centre a et de rayon r rencontre X.

Autrement dit X contient des points à une distance de a plus petite que toute valeur donnée.

<u>Exemple</u> : $X =]-2, 3[\subset \mathbb{R}$

l'intervalle $[-2, 3]$ est formé des points adhérents à X.

par exemple -2 est adhérent à X car la boule de centre -2 et de rayon r est l'intervalle $]-2-r, -2+r[$ qui rencontre bien $X =]-2, 3[$ pour tout $r > 0$.

<u>Définition</u> $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$ application numérique $a \in \mathbb{R}^n$ adhérent à X. Soit ℓ un réel. Nous disons f tend vers ℓ quand x tend vers a si :
" $f(x)$ est proche de ℓ quand x est proche de a "
Nous notons : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (ℓ est alors unique)

<u>Remarque</u> : la définition précise est que pour tout intervalle I centré en ℓ, il existe une boule de rayon $r > 0$ centrée en a tel que si $x \in X \cap B(a,r)$ et si $x \neq a$, alors $f(x)$ est dans I.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$

<u>Alors</u> : $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \ell + m$ $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$ $\lim\limits_{x \to a} (fg)(a) = \ell m$

De plus si $m \neq 0$ $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell}{m}$

De plus si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to \ell} h(x) = m$ alors $\lim\limits_{x \to a} (h \circ f)(x) = m$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel, $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ intervalle centré en 0
Considérons l'intervalle $J =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Pour tout $x \in J$
non nul, $f(x) = 0 \in I$. D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
En particulier, de l'unicité de la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 1$.

Définition : $X \subset \mathbb{R}^n$ $f : X \to \mathbb{R}$ $x_0 \in X$
Alors, f est dite continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ $g : X \to \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en x_0, il en est de même de $f+g$, λf, fg. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$, alors $h \circ f$ est continue en x_0

$X \subset \mathbb{R}^n$ $f : X \to \mathbb{R}$ f est dite continue si elle est continue pour tout $x_0 \in X$.

<u>Proposition :</u> Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs ensemble de définition qui sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$

<u>Remarque</u> : $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$. Si f est continue en $f(x_0)$ $f(x_0)$ est une bonne approximation de $f(x)$ pour x proche de x_0
Nous écrivons : $f(x_0+h) \sim f(x_0)$

<u>restriction d'une application :</u> A et B deux ensemble et $g : A \to B$ une application. Si $C \subset A$, nous appelons restriction de g à C et notons $g|_C$ l'application

$$g|_C : C \to A \qquad c \in C \mapsto g(c)$$

La restriction $g|_C$ est le même processus que g, mais avec C comme ensemble de départ.

<u>Proposition :</u> Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $Y \subset X$, la restriction de f à Y est continue

<u>Corollaire</u> : Les restrictions à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^n$ sont continues.

Soit f une fonction rationnelle de n variables et $D_f \subset \mathbb{R}^n$ son domaine de définition. La restriction de f à tout sous-ensemble de D_f est continue.

<u>Exemple</u> : $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = x_2$

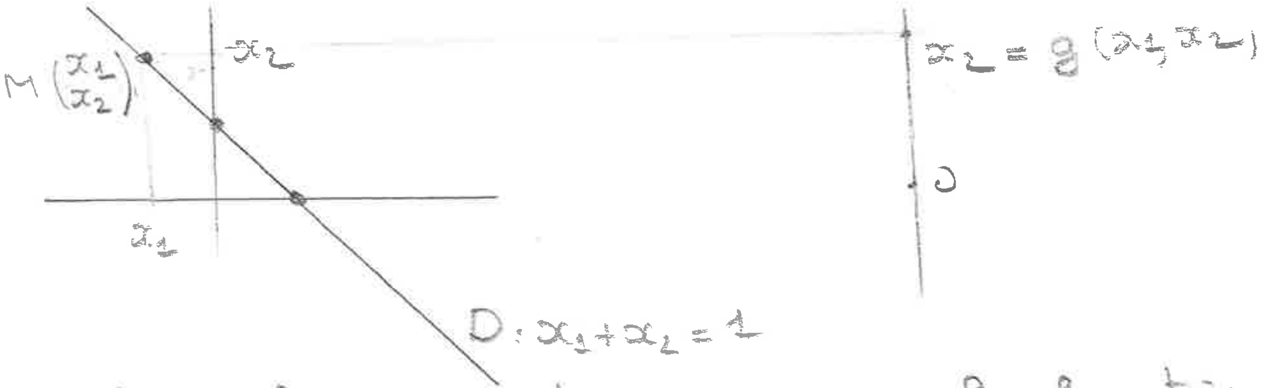
est une application continue. Car elle est polynomiale.

Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 = 1\}$

Alors, l'application

$g : D \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_2$

est continue. En effet g est la restriction à D de l'application polynomiale h.



L'application h peut être vu comme la fonction "altitude" g est alors l'altitude sur D.

3 Dérivée d'une fonction numérique d'une variable

Prenons un véhicule qui se déplace en ligne droite et qui en t heures a parcouru $\alpha(t)$ kilomètres. Au temps t_0 le compteur de vitesse affiche sa vitesse en km/heure, qui est $\dfrac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$ pour $t-t_0$ petit

Soit $a<b$ deux réels (éventuels infinis). Soit

$\alpha :]a,b[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \alpha(t)$

une application numérique. Nous disons que α est dérivable en t_0 de dérivée $\alpha'(t_0)$ si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0} = \alpha'(t_0)$$

Si α est dérivable en tout t de $]a,b[$, nous disons que α est dérivable. La fonction

$$]a,b[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \alpha'(t)$$

est alors appelée la fonction dérivée de α

Exemple : Considérons un réel k et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = k$ pour tout t. Nous disons que f est une fonction de valeur k. Nous pouvons noter k cette fonction. Notons que pour tout $t \neq t_0$

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = 0$$

D'où

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = 0$$

Donc f est dérivable et f' est la valeur constante de valeur 0

Autrement dit $(k)' = 0$.

Supposons maintenant que f soit définie par $f(t) = t^2$ pour tout $t \neq t_0$)

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{(t + t_0)(t - t_0)}{t - t_0} = t + t_0$$

C'est un polynôme en t. Par continuité des fonctions polynomiales

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = 2t_0$$

Donc, f est dérivable et $f'(t) = 2t$ pour tout t réel.

Autrement dit $(t^2)' = 2t$

Plus généralement pour tout entier n

$$(t^n)' = n\,t^{n-1}$$

Lorsqu'elles ont un sens, les formules suivantes sont vérifiées

$(f+g)' = f' + g'$	$(\lambda f)' = \lambda f'$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$	$(fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$	$(g\circ f)' = f' \cdot g'\circ f$

Dérivée d'une fonction polynomiale

$$\left(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)' = k a_k x^{k-1} + (k-1) a_{k-1} x^{k-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

le monome x^k est remplacé par $k x^{k-1}$

x^{k-1} — $(k-1)x^{k-2}$

$\vdots$

x^2 — $2x$

x — 1

le monome independant de x est remplacé par 0

Ainsi si f est la fonction polynomiale définie par

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 17x - 5$$

f' est la fonction polynomiale définie par

$$f'(x) = 2x^2 - 4x + 17$$

Dérivée d'une fonction rationnelle : Une fonction rationnelle est définie pour les valeurs de x où sont dénominateur est non nulle. Sa dérivée est donnée par la formule de dérivation ~~d'un~~ quotient.

Exemple : $\mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

pour $x \neq 1$ $\quad f'(x) = \frac{(x-1).2 - 1(2x-4)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x+4}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$

4 Dérivées partielles d'une fonction numérique

Proposition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in U$
Soit f une fonction numérique $f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$
Nous disons que f admet en $a = (a_1, .., a_n)$ une dérivée partielle par rapport à x_i si la fonction d'une variable

$$x_i \longmapsto f(a_1, .., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .., a_n)$$

est dérivable en a_i. La dérivée de cette fonction en a_i est notée : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, .., a_n)$

Si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en tout point de U, nous obtenons une fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, .., x_n)$$

appelée dérivée partielle de f par rapport à x_i.

Calculer une dérivée partielle, c'est calculer la dérivée d'une fonction d'une variable : la fonction obtenue en "fixant" les autres variables

Nous obtenons alors que lorsqu'elles ont un sens les formules suivantes sont vérifiées :

$\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$	$\dfrac{\partial \lambda f}{\partial x_i} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} g + f \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$
$\dfrac{\partial(\frac{1}{g})}{\partial x_i} = - \dfrac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$	$\dfrac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i} = \dfrac{g \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} f}{g^2}$	

Remarque : Les fonctions polynomiales de n variables admettent des dérivées partielles qui sont des fonctions polynomiales

calcul de la dérivée partielle d'un monôme :

$$\frac{\partial(a x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i} \dots x_n^{k_n})}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k_i = 0 \text{ c.a.d si le monôme ne depend pas de } x_i \\ a x_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} (k_i x_i^{k_i - 1}) x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_n^{k_n} = \\ \quad k_i a x_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_i - 1} x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_n^{k_n} \end{cases}$$

" remplacer $x_i^{k_i}$ par $k_i x_i^{k_i - 1}$ "

par addition, nous obtenons la remarque et la méthode de calcul de la dérivée partielle d'une fonction polynomiale

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1,x_2) = \frac{1}{6} x_2 x_1^3 - 3x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^3 + 17$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{1}{6} x_2 (3x_1^2) - 3(2x_1)x_2^4 + 1 x_2^3 + 0 = 2x_2 x_1^2 - 6x_1 x_2^4 + x_2^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{6} 1 . x_1^3 - 3x_1^2 (4x_2^3) + x_1(3x_2^2) + 0 = \frac{1}{6} x_1^3 - 12x_1^2 x_2^3 + 3x_1 x_2^2$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1,x_2,u) = x_1^2 x_2 + u(x_1 + x_2) + 2u$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,u) = (2x_1)x_2 + u(1+0) + 0 = 2x_1x_2 + u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,u) = x_1^2(1) + u(0+1) + 0 = x_1^2 + u$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_1,x_2,u) = 0 + 1(x_1+x_2) + 2 = x_1 + x_2 + 2$$

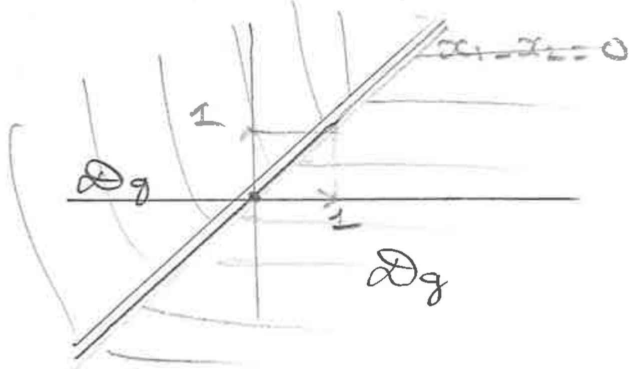
Remarque : Les fonctions rationnelles de n variables admettent des dérivées partielles sur leurs ouverts de définition et ces dérivées partielles sont des fonctions rationnelles

<u>Exemple</u> : Soit g la fonction rationnelle :

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2 - 4x_2}{x_1 - x_2}$$

Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - x_2 \neq 0\}$

C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$



$\mathcal{D}_g$: $\mathbb{R}^2$ privé de la droite $x_1 - x_2 = 0$

En tous points de l'ouvert $\mathcal{D}_g$, g admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_2) - 1 \times (2x_1x_2 - 4x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{-2x_2^2 + 4x_2}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_1 - 4) - (-1)(2x_1x_2 - 4x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{2x_1^2 - 4x_1}{(x_1 - x_2)^2}$$

5) Fonctions numériques à dérivées partielles continues

<u>Proposition (une variable)</u> : a, b deux réels. Une application $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable est continue.

Mais une application $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$ qui admet des dérivées partielles n'est pas nécessairement continue.

<u>Proposition</u> : $f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si f admet des dérivées partielles continues alors f est continue.

<u>Définition (différentielle de f en a)</u> : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$

Nous supposons que f admet des dérivées partielles continues. Considérons $a = (a_1, , a_n) \in U$. L'application suivante est appelée différentielle et notée $Df(a)$.

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$h = (h_1, .., h_n) \mapsto Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, h_n$$

Comme U est ouvert et $a \in U$, rappelons que pour $h_1, \dots, h_n$ petits $a + h = (a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) \in U$

<u>approximation de f à l'ordre 0</u> :

Pour $h_1, \dots, h_n$ petits : $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) \sim f(a_1, \dots, a_n)$

Autrement dit $f(a_1, \dots, a_n)$ est une approximation (dite à l'ordre zéro) de $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n)$ pour $h_1, \dots, h_n$ petits. Rigoureusement cela signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{(h_1, \dots, h_n) \to (0, \dots, 0)} \varepsilon(h_1, \dots, h_n) = 0$ et pour tout $h_1, \dots, h_n$ réels petits

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon(h_1, \dots, h_n)$$

<u>approximation à l'ordre 1</u> : Pour $h_1, \dots, h_n$ petits

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) \sim f(a_1, \dots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n$$

Autrement dit $f(a_1, \dots, a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n$

est une approximation de $f(a_1+h_1, .., a_n+h_n)$ pour $h_1, .., h_n$ petits.
Rigoureusement, cela signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{(h_1,..,h_n)\to(0,..,0)} \varepsilon(h_1,..,h_n) = 0$ et pour tout $h_1, .., h_n$ réels petits :

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, .., a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, h_n + \sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}\ \varepsilon(h_1, .., h_n)$$

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + x_2$

f est polynomiale donc admet des dérivées partielles à toute ordre et ces dérivées partielles sont continues (car des fonctions polynomiales..

Prenons $a = (1, 1)$ $a_1 = 1$ $a_2 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 1$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + x_1 + 1$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 4$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1) = 4$

$f(1,1) = 5$

approximation ordre 0 : pour h_1, h_2 petits

$f(1+h_1, 1+h_2) \sim 5$

<u>approximation ordre 1</u> : pour h_1, h_2 petits

$f(1+h_1, 1+h_2) = 5 + 4h_1 + 4h_2$

Pour $(h_1, h_2) = \left(\frac{1}{400}, \frac{1}{800}\right)$, remplacer $f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right)$ par $f(1,1) = 5$ donne une erreur de $\frac{3}{200}$. Mais remplacer $f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right)$ par $f(1,1) + 4 \cdot \frac{1}{400} + 4 \cdot \frac{1}{800} = 5 + \frac{3}{200}$ donne une erreur de $\frac{1}{100.000}$.

IV Fonction numérique d'une variable

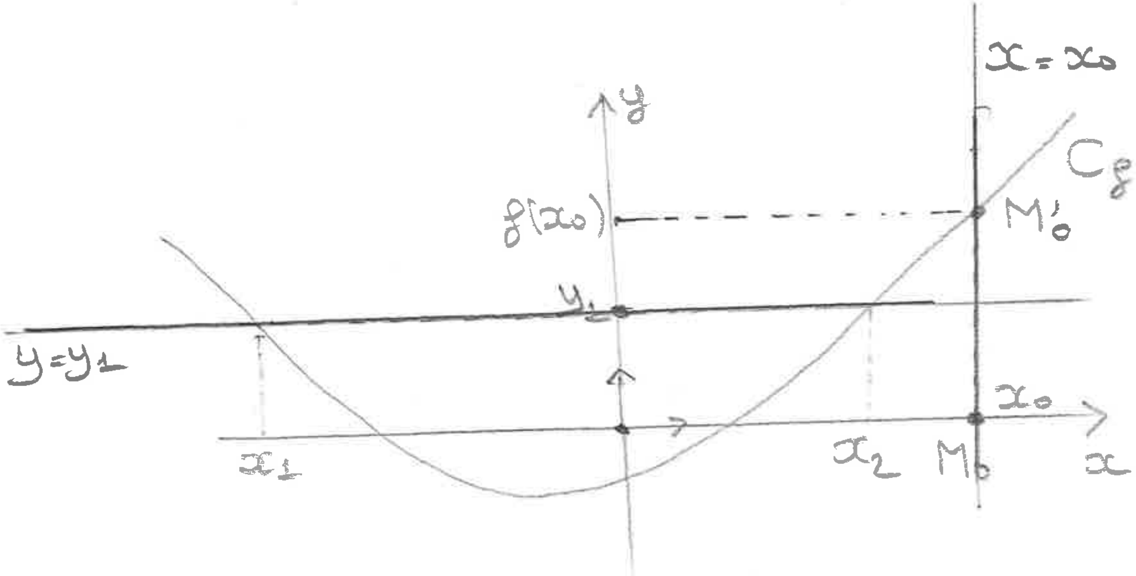
1) Courbe représentative

Soit I une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application :
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto y = f(x)$.
Associons à f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y = f(x) \}$$

La représentation géométrique de Γ est appelé courbe représentative de f ; noté C_f :
Un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe représentative de f si $y = f(x)$

Montrons comment la courbe représentative de f permet de donner l'image par f des $x \in I$ et les antécédents de tout $y \in \mathbb{R}$



$f(x_0)$ image de x_0 par f

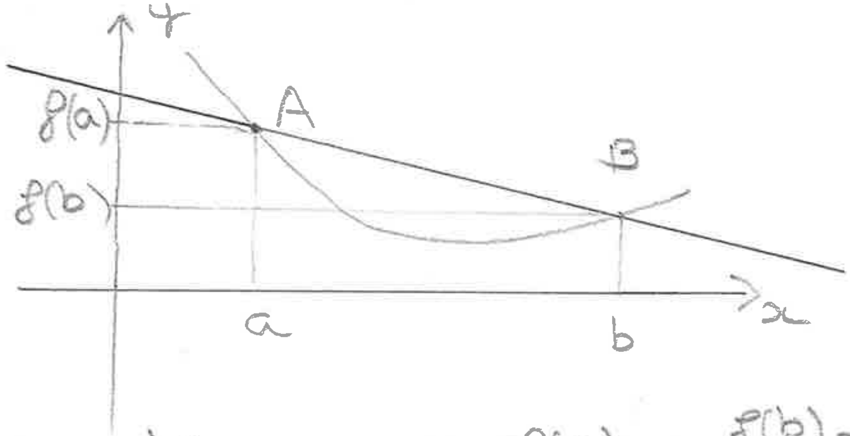
x_1 et x_2 antécédents de y_1 par f

Soit $x_0 \in I$, traçons la droite parallèle à l'axe des y passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0, 0)$ (autrement dit la droite d'équation $x = x_0$) Cette droite coupe C_f en unique point M'_0. L'ordonnée de M'_0 est $f(x_0)$ ou encore M'_0 a pour coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Ainsi $f(x_0)$ est déterminé.

Inversement soit $y_1 \in \mathbb{R}$, traçons la droite parallèle à l'axe des x passant par le point M_1 de coordonnées $(0, y_1)$ (autrement dit la droite d'équation $y = y_1$

- Si cette droite coupe C_f en aucun point, y_1 n'a pas d'antécédent par f
- Sinon les antécédents de y_1 sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec cette droite $y = y_1$

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$
Les point A de coordonnées $(a, f(a))$ et B de coordonnées $(b, f(b))$ sont deux points de la courbe représentative de f. La droite (AB) est appelée sécante de la courbe représentative de f



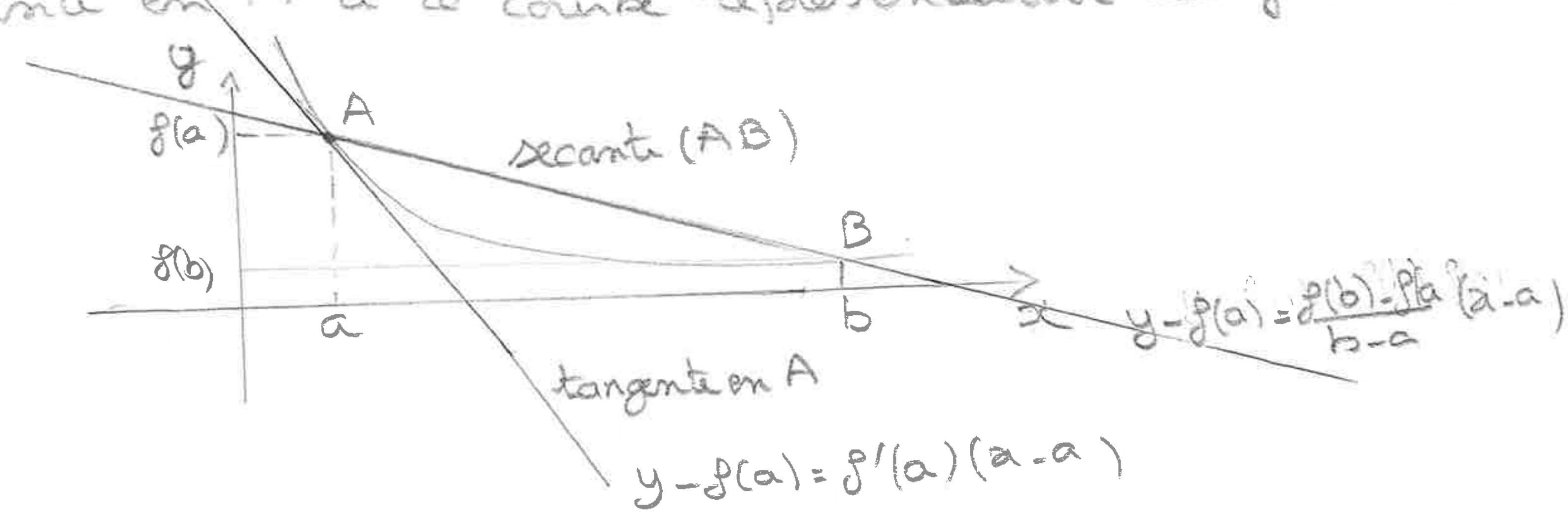
La droite d'équation $$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$
passe par A et B et est donc l'équation de la droite (AB)

Supposons f dérivable, nous avons $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$

et la sécante (AB) tend vers la droite d'équation

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

appelé tangente en A à la courbe représentative de f



2) Croissance - Decroissance

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a étant eventuellement $-\infty$ et b étant eventuellement $+\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Nous disons que

a) f est constante s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = k \quad \text{pour tout } x \in I$$

b) f est croissante si f conserve l'ordre naturel des réels

$$x, y \in I \text{ et } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f est strictement croissante si

$$x, y \in I \text{ et } x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

c) f est décroissante si f renverse l'ordre naturel des réels

$$x, y \in I \text{ et } x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

f est strictement décroissante si

$$x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Exemple : Le taux de radioactivité d'un élément est une fonction décroissante du temps (hélas lentement ...)

<u>Proposition</u> : $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ f dérivable

a) si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$ f est une fonction constante

b) si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) > 0$ f est strictement croissante

c) si pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) < 0$ f est strictement décroissante

Attention, l'hypothèse que la source de f est un intervalle est importante. La proposition serait fausse sur une réunion d'intervalle par exemple sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

<u>Extension de la notion de limite</u> : $f :]a,b[\to \mathbb{R}$

Rappelons que si $b \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to b} f(x) = l \in \mathbb{R}$ signifie que $f(x)$ est proche de l (aussi proche que l'on veut) quand x est proche de b et $x \in]a,b[$. Etendons définition au cas $b = +\infty$ ou $l = \pm\infty$:

$b \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$: $f(x)$ grand quand x proche de b, $x \in]a,b[$

$\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$

$b = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Dans ces 6 cas nous dirons que f a une limite en b éventuellement infini.

De même si $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ signifie que $f(x)$ est proche de ℓ (aussi proche que l'on veut) quand x proche de a et $x \in]a,b[$

Cette définition s'étend au cas $a = -\infty$ ou $b = \pm\infty$

$a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$a = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Dans ces 6 cas, nous disons que f a une limite en a eventuellement infini.

<u>Proposition</u>: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, f derivable, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$

Alors, nous avons

1) f strictement croissante

2) $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x) < m = \lim\limits_{x \to b} f(x)$ existent (eventuellement infini)

3) $f(x)$ pour $x \in]a,b[$ decrit $]\ell, m[$. L'application $]a,b[\to]\ell, m[$ $x \mapsto f(x)$ est bijective. Son inverse $g :]\ell, m[\to]a,b[$ est derivable

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Si maintenant $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[$

1) f strictement décroissante

2) $\ell = \lim_{x \to a} f(x) > m = \lim_{x \to b} f(x)$ existent (éventuellement infini)

3) $f(x)$ pour $x \in]a,b[$ décrit $]m,\ell[$. L'application $]a,b[\to]m,\ell[$ $x \mapsto f(x)$ est bijective. Son inverse $g :]m,\ell[\to]a,b[$ est dérivable et

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x^2$

f est polynomiale, donc continue et derivable

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

Ainsi si $x > 0$ $f'(x) > 0$ et si $x < 0$ $f'(x) < 0$

f est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]\infty, 0[$

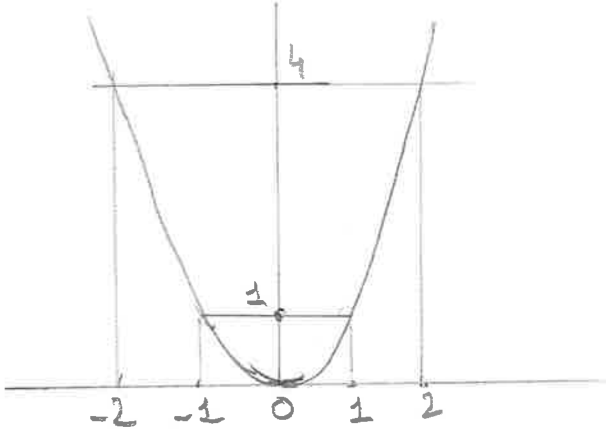
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Résumons ces informations sur tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	4	1		1	4	$+\infty$

Nous noterons que $f(-x) = f(x)$ (la fonction f est paire)

Comme $f(0) = 0$, le point de coordonnée $(0,0)$ est dans la courbe représentative de f. L'équation de la tangente à l'origine est $y = 0$



courbe représentative
de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$
(dite parabole)

Regardons maintenant f sur $]0,\infty[$
$h :]0,\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$
h est dérivable, $h'(x) = 2x > 0$ pour $x \in]0,\infty[$
Appliquons la proposition, comme $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$
L'application $]0,\infty[\to]0,\infty[\quad x \mapsto x^2$ est bijection.
Son inverse $g :]0,\infty[\to]0,\infty[$, est bijective.

Si $y > 0$, $g(y)$ est l'unique $x > 0$ tel que $x^2 = y$.
$g(y)$ est appelé la racine carrée de y notée $\sqrt{y}$.
De plus g est dérivable : $g'(y) = \dfrac{1}{h'(g(y))} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

En résumé, nous avons montré :

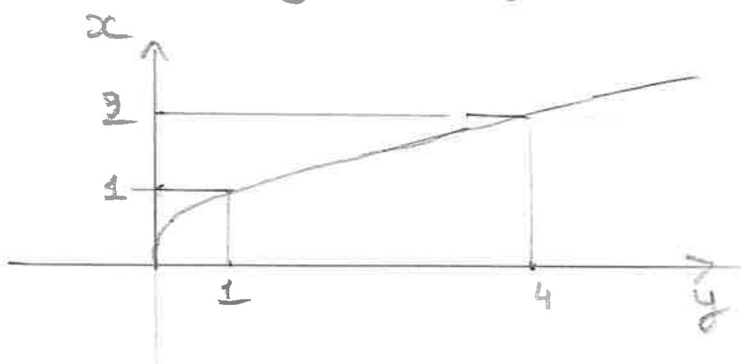
pour tout $y > 0$, il existe un unique réel > 0 noté $\sqrt{y}$ de carré y

la fonction $]0, \infty[\to]0, \infty[\quad y \mapsto \sqrt{y} = x$

est dérivable de dérivée $(\sqrt{y})' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} > 0$

$\lim\limits_{y \to \infty} \sqrt{y} = +\infty \qquad \lim\limits_{y \to 0} \sqrt{y} = 0 \qquad \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = +\infty$

y	0	1		$+\infty$
$1/2\sqrt{y}$	$+\infty$		$+$	
$\sqrt{y}$	0	1	$\nearrow$	$+\infty$



Conséquence : fixons un réel a ;

$$\boxed{x^2 = a \text{ et } x \text{ réel} \iff \begin{cases} \text{pas de solution si } a < 0 \\ x = 0 \text{ si } a = 0 \\ x = \sqrt{a} \text{ et } x = -\sqrt{a} \text{ si } a > 0 \end{cases}}$$

Nous obtiendrions de même que si n est un entier naturel $\geqslant 2$, pour tout $y > 0$, il existe un unique réel > 0 noté $\sqrt[n]{y}$ dont la puissance n ième est égal à y : $(\sqrt[n]{y})^n = y$

La fonction $]0,\infty[\to]0,\infty[\quad y \mapsto \sqrt[n]{y}$ est

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$$

<u>Exercice (bijection)</u> Soit f l'application

$$f :]-\infty, 1[\longrightarrow]2, \infty[\qquad x \mapsto f(x) = (x-1)^2 + 2$$

a) vérifier que f est bien définie

b) montrer que f est bijective et préciser son inverse

<u>Solution :</u> a) Soit $x > 1$, $(x-1)^2$ est alors un réel strictement positif et $f(x) = (x-1)^2 + 2$ est donc strictement supérieur à 2.

Ainsi $f(x) > 2$ et notre application f est définie

b) Soit $y > 2$ (c'est à dire au but de l'application f), cherchons les antécédents x de y par f. Ceux sont les solutions du

$$x < 1 \quad \text{et} \quad y = (x-1)^2 + 2$$

soit $\quad x - 1 < 0 \quad$ et $\quad (x-1)^2 = y - 2$

soit $\quad x - 1 = -\sqrt{y-2}$

Ainsi, $x = 1 - \sqrt{y-2}$ est l'unique antécédent de y par f.
L'application f est donc bijective, son inverse est
$f^{-1} :]2,\infty[\to]-\infty, 1[\quad y \mapsto f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$

Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{R}^n$, donc on ne peut naturellement parler de fonction croissante ou décroissante de plusieurs variables variables. Par contre, nous pouvons parler de la croissance ou décroissance des fonctions partielles obtenues en fixant $n-1$ variables. Ces fonctions partielles sont en effet des fonctions d'une variable.

Proposition : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Soit $i \in \{1, 2, .., n\}$, nous supposons $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U

1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,..,x_n) \geq 0$ pour tout $(x_1,..,x_n) \in U$: alors la fonction d'une seule variable $x_i \mapsto f(x_1,..,x_{i-1},x_i,x_{i+1},..,x_n)$ où $x_1,..,x_{i-1},x_{i+1},..,x_n$ sont fixés est alors croissante sur tout intervalle ouvert où elle est définie

2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,..,x_n) < 0$ pour tout $(x_1,..,x_n) \in U$: même énoncé en remplaçant croissante par décroissante.

Exemple Si p_1 désigne le prix du produit 1

p_2 — produit 2

r le budget du consommateur

Soit $U = \{(p_1,p_2,r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ et $r > 0\}$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction de trois variables définie par

$$f(p_1,p_2,r) = \frac{p_2 r}{p_1(p_1+p_2)}$$

Cette fonction peut modéliser une demande pour les prix p_1, p_2 et le budget r.

Nous remarquons que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. U est en effet l'intersection de 3 ouverts définis par $p_1 > 0$, $p_2 > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1, p_2, r) = \frac{-p_2 r (2p_1 + p_2)}{p_1^2 (p_1 + p_2)^2} < 0 \quad \text{pour } (p_1, p_2, r) \in U$$

Ainsi à p_2 et r fixé la demande est une fonction décroissante de p_1.

3) Quelques fonctions utiles en économie

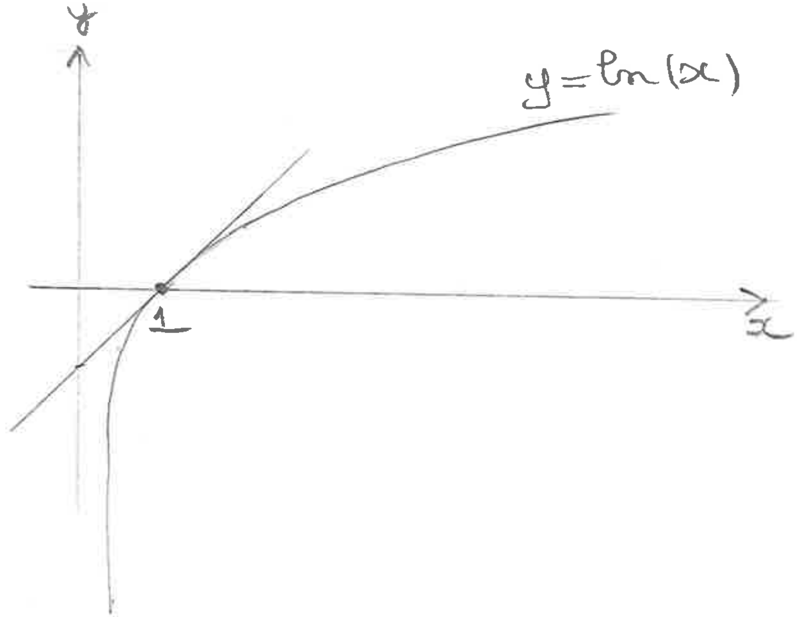
3.1 Fonction logarithme

Il existe une unique fonction appelée logarithme népérien notée $\ln$ qui a les propriétés suivantes

$\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x)$

$\ln(1) = 0 \qquad \ln$ est dérivable $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

De plus, $\ln$ est continue, strictement croissante



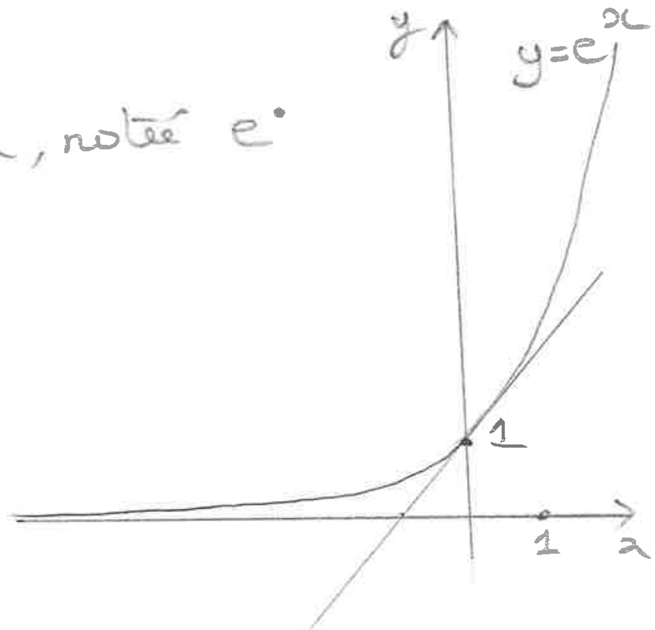
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

tangente en $(1,0)$: $y = x - 1$

propriété fondamentale : $\boxed{x > 0, y > 0 : \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$

3.2 Fonction exponentielle

Il existe une unique fonction appelée exponentielle, notée $e^{\cdot}$ qui a les propriétés suivantes :



$e : \mathbb{R} \to]0, \infty[\qquad x \mapsto e^x$

$e^0 = 1 \qquad e^{\cdot}$ est dérivable $(e^x)' = e^x$

De plus, $e^{\cdot}$ est continue strictement

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

tangente en $(0,1)$: $y - 1 = x$

propriétés fondamentales

$$\boxed{\text{pour tout } x, y \qquad e^{(x+y)} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$$

Lien entre logarithme et exponentielle

pour tout x réel : $\ln(e^x) = x$; pour tout $x > 0$ $e^{\ln(x)} = x$

Les fonctions exponentielle et $\ln$ sont bijectives et inverses l'une de l'autre

3.3 Fonction puissance

Soit x un réel, nous convenons de noter $x^0 = 1$.

Soit n un entier naturel strictement positif. Nous convenons de noter x^n le produit de x n fois par lui même

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{n \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Toujours pour n entier strictement positif nous posons

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Définition : Soit $x > 0$, p et q deux entiers. Nous désignons par $x^{p/q}$ l'unique réel >0 tel que $y^q = x^p$

L'application $]0,\infty[\to]0,\infty[$ $x \to x^{p/q}$ est continue dérivable :

$$\left(x^{p/q}\right)' = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}, \quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad x^{p/q} = e^{p/q \ln x}$$

<u>Définition</u> Soit $x>0$ un réel et un réel . nous notons x^a le réel >0 : $x^a = e^{a\ln(x)}$ et l'appelon x puissance a.

L'application $]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^a$ est continue, dérivable $\boxed{(x^a)' = a x^{a-1}.}$

x^a est $\begin{cases} \text{croissante pour } a>0 \\ \text{decroissante pour } a<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{pour } a>0 \\ 0 & \text{pour } a<0 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} x^a = \begin{cases} 0 & \text{pour } a>0 \\ +\infty & \text{pour } a<0 \end{cases}$

cas : $a>0$

x	0	$+\infty$
ax^{a-1}	$+$	
x^a	$0 \nearrow$	$+\infty$

cas : $a<0$

x	0	$+\infty$
ax^{a-1}	$-$	
x^a	$+\infty \searrow$	0

<u>propriétés fondamentales</u> : pour tout $x, y>0$

$x^{a+b} = x^a x^b$, $(x^a)^b = x^{ab}$, $(xy)^a = x^a y^a$

$x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$, $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$

<u>Exemple</u> : Soit α, β réels $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$

$U = U_1 \cap U_2$ $\quad U_1 : x_1 > 0 \quad U_2 : x_2 > 0$

U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ car demi-plans définis par des inégalités strictes. Donc U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection d'ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$f : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 17\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Fixons x_2 la fonction $x_1 \mapsto 17 x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ est dérivable de dérivée $17\alpha\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à x_1 $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 17\alpha\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$

De même f admet une dérivée partielle par rapport à x_2

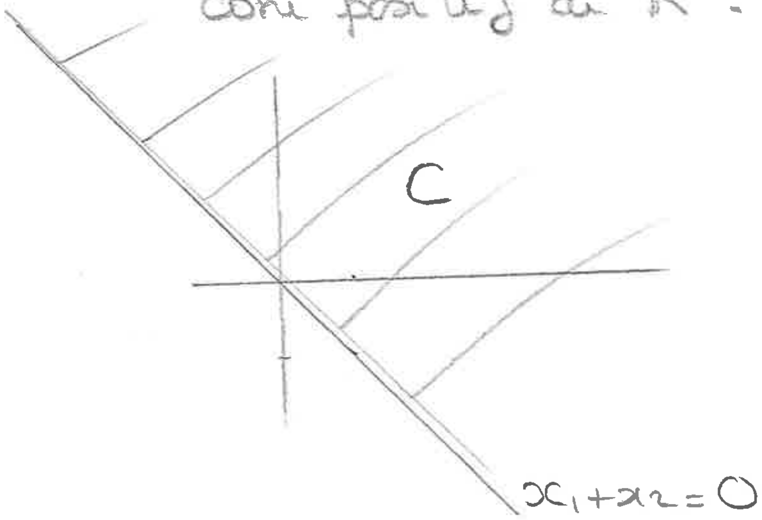
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 17\beta\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1}$$

4) Fonctions homogènes

<u>Définition :</u> Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est appelé cône positif de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ nous avons $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in C$

<u>Remarque :</u> $\mathbb{R}^n$ tout entier est bien sur un cône positif. Pour $n = 2$, $C \subset \mathbb{R}^2$ est un cone positif si la représentation géométrique de C vérifie la propriétés suivante : Si un point M est dans la représentation géométrique de C, la demi-droite OM avec l'origine exclue fait encore partie de cette représentation.

<u>Example :</u> $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 + x_2 > 0\}$ est un cone positif de $\mathbb{R}^2$.



Soit $(x_1, x_2) \in C$ et $\lambda > 0$.

$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) > 0$

car $\lambda > 0$ et $x_1 + x_2 > 0$

Donc, $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in C$

<u>remarque :</u> Soit $a_1, .., a_n$ des réels et

$$C = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } a_1 x_1 + a_2 x_2 + .. + a_n x_n > 0\}$$

Alors C est un cône positif de $\mathbb{R}^n$. Même énoncé en remplaçant dans la définition le symbole $>$ par $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ ou $=$

<u>Définition (fonction homogène)</u> Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$ et k un réel. Une fonction numérique

$$f : C \to \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$$

est dite homogène de degré k si pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in C$ et $\lambda > 0$ réel : $f(\lambda x_1, \lambda x_2, .., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, .., x_n)$

k est appelé le degré d'homogénéité de f.

<u>Exemple de base :</u>

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad a > 0, b > 0, c > 0\}$$

$$v : U \to \mathbb{R} \qquad (a, b, c) \mapsto v(a, b, c) = abc$$

est une fonction homogène de degré 3.

Le lecteur montrera que U est un cône positif.

Si $(a,b,c) \in U$ et $\lambda > 0$

$v(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = (\lambda a)(\lambda b)(\lambda c) = \lambda^3 abc = \lambda^3 v(a,b,c)$

Cela montre que v est homogène de degré 3. Plus généralement les fonctions "volumes" sont homogènes de de degré 3 et les fonctions surfaces homogènes de degré 2.

Exemple : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$

$\mathbb{R}^2$ est bien un cône positif. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$

$$g(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_1)(\lambda x_2) + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2$$
$$= \lambda^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \lambda^2 g(x_1, x_2)$$

Donc, g est homogène de degré 2

Exemple : $h : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ $\quad h(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $\lambda > 0$: $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ car sinon $(\lambda x_1, \lambda x_2) = (0,0)$, donc $\lambda x_1 = 0$, $\lambda x_2 = 0$ et comme $\lambda \neq 0$: $(x_1, x_2) = (0,0)$ impossible.

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est donc un cône positif

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $\lambda > 0$:

$$h(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda x_1)^4 + (\lambda x_2)^4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 x_1^4 + \lambda^4 x_2^4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^4 (x_1^4 + x_2^4)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda^4}\sqrt{x_1^4 + x_2^4}} \quad \text{car } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{x_1^4 + x_2^4}} = \lambda^{-2} \frac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}} \quad \text{car } \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2}$$

$$= \lambda^{-2} h(x_1, x_2).$$

Ainsi, h est une fonction homogène de degré -2.

<u>proposition (Identité d'Euler)</u> Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un cône positif qui soit aussi un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : C \to \mathbb{R}$, $(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$ admettant des dérivées partielles continues. Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ homogène de} \\ \text{degré } k \end{array} \right. \quad \text{Equivaut à} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x = (x_1, \dots x_n) \in C \\ x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) = k f(x) \end{array} \right.$$

Exercice : $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 > 0\}$

$f : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$

Montrer f homogène et déterminer son degré d'homogenéité.
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et vérifier l'identité d'Euler.

Solution : nous avons vu que U est un cône positif de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x_1,x_2) \in U$ et $\lambda > 0$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda x_1 - \lambda x_2}{\lambda x_1 + \lambda x_2} = \frac{\lambda(x_1 - x_2)}{\lambda(x_1 + x_2)} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = f(x_1,x_2)$$

$$= 1 . f(x_1,x_2) = \lambda^0 f(x_1,x_2)$$

Donc, f est homogène de degré 0

U est un ouvert car demi-plan défini par une inégalité stricte. f est une fonction rationnelle défini sur U donc admet des dérivées partielles continues sur U.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)^2} = \frac{2x_2}{(x_1+x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{(x_1+x_2)(-1)-(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)^2} = -\frac{2x_1}{(x_1+x_2)^2}$$

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_1\cdot\frac{2x_2}{(x_1+x_2)^2} - x_2\cdot\frac{2x_1}{(x_1+x_2)^2}$$

$$= \frac{2x_1x_2}{(x_1+x_2)^2} - \frac{2x_1x_2}{(x_1+x_2)} = 0 = 0\, f(x_1,x_2)$$

Ce qui fait f vérifié l'identité d'Euler associé a une fonction homogène de degré 0.

4 Compléments sur les limites d'une fonction numérique d'une variable

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Nous avons rappelé les propriétés des limites : si $x_0 \in]a,b[$

$\lim\limits_{x \to x_0} f = \ell$ $\lim\limits_{x \to x_0} g = m$; alors

$\lim\limits_{x \to x_0} f+g = \ell + m$, $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f = \lambda m$, $\lim\limits_{x \to x_0} (fg) = \ell m$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\ell}{m}$ si $m \neq 0$,

Ces formules s'étendent pour a, b, ℓ, m éventuellement avec les règles suivantes :

$+\infty + (+\infty) = +\infty$ $-\infty + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$ $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\frac{\ell}{+\infty} = 0$, $\frac{\ell}{-\infty} = 0$, $\frac{+\infty}{\ell} = (\text{signe } \ell)\infty$, $\frac{-\infty}{\ell} = -(\text{signe } \ell)\infty$

0^+ signifie que la fonction est > 0 au voisinage de x_0

$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$ $\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$ ...

On notera que les formes suivantes sont indéterminées

$+\infty + (-\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

<u>Proposition</u> : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x} = 0$,

Ces propriétés permettent de comparer les croissances des fonctions exponentielle, puissance logarithme

<u>Exercice</u> : Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^x - x$.

Solution : C'est une forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$.
Pour x grand e^x est plus grand que x car $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Dans $e^x - x$ mettons le plus grand terme en facteur. $\to 0$ quand x grand

$$\underbrace{e^x}_{+\infty} - x = e^x \underbrace{\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}_{1}$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty$

V Maximum et minimum d'une fonction numérique

1) premiers résultats

<u>Définition :</u> Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et une fonction numérique $f : A \to \mathbb{R}$ $(x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .. x_n)$

1) Nous disons que f admet un maximum en $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ si pour tout $x = (x_1, .., x_n) \in A$: $f(x_1, x_2, .., x_n) \leq f(a_1, a_2, .., a_n)$

2) Nous disons que f admet un minimum en $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ si pour tout $x = (x_1, ... x_n) \in A$: $f(x_1, x_2, .., x_n) \geq f(a_1, a_2, .., a_n)$

3) Nous disons que f admet un maximum local en $a = (a_1, .., a_n)$ s'il existe $r > 0$ réel tel que si $x = (x_1, .., x_n) \in B(a, r) \cap A$

$$f(x_1, .., x_n) \leq f(a_1, .., a_n)$$

4) Nous disons que f admet un minimum local en $a = (a_1, .., a_n)$ s'il existe $r > 0$ réel tel que si $x = (x_1, .., x_n) \in B(a, r) \cap A$

$$f(x_1, ... x_n) \geq f(a_1, a_2, .., a_n)$$

Si A est la surface de la terre et f la fonction température en un point de la terre. Dire que la température admet un maximum à Nice, c'est dire que en dehors de Nice la température est inférieure ou égale à celle de Nice (c'est rarement vrai). Dire que la température admet un maximum local à Nice, c'est dire que dans les environs de Nice la température y est inférieure ou égale (c'est plus souvent vrai, car il peut faire plus chaud dans une ville)

<u>Proposition :</u> Soit $a < b$ deux réels, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x)$ une fonction <u>dérivable</u>. Supposons que f admet en $c \in]a,b[$ un maximum ou un minimum local, alors $f'(c) = 0$

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

f est polynomiale donc dérivable $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{9}{2x} + \frac{6}{x^2}\right)}_{\to 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\to -\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{9}{2x} + \frac{6}{x^2}\right)}_{\to 1} = -\infty$$

$f'(x)$ est du signe du trinôme $(x-1)(x-2)$ donc positif à l'extérieur des racines 1 et 2, négatif à l'intérieur. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suivant le tableau de variation f admet un maximum local en 1 et un minimum local en 2. Nous constatons que $f'(1)=0$ et $f'(2)=0$. En aucun réel, f admet un maximum ou un minimum, car f peut prendre une valeur positive aussi grande que l'on veut, ou négative aussi grande que l'on veut

Exemple La tableau de variation de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = x^2$

f admet un minimum en 0

$f'(0)=0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$		$-$		0		$+$	
x^2	$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$

(dans la proposition a et b peuvent être infini $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$)
Notons que si nous regardons f sur $[-1,1]$:

$$[-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$$

Cette fonction admet un maximum en 1 et -1. Mais notons que $f'(1) \neq 0$ $f'(-1) \neq 0$. La contradiction vient du fait que $[-1,1]$ n'est pas un intervalle ouvert du type $]a,b[$.

<u>Définition</u> (point critique) : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Nous supposons que f admet des dérivées partielles sur U. Nous appelons point critique de f un $x = (x_1, x_2, .. x_n)$ appartenant à U tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, .., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, .., x_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, .., x_n) = 0$$

<u>Exercice</u> : Trouver les points critiques de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 6x_2$$

f est une fonction polynomiale et donc admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 - 6$$

Ainsi, (x_1, x_2) est un point critique de f, si et seulement si (x_1, x_2) est solution du système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

ou encore du système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5 = 0 & E_1 \\ 2x_1 + 8x_2 - 12 = 0 \end{cases}$

par différence, nous obtenons : $8x_2 - x_2 - 12 + 5 = 0$

soit $7x_2 - 7 = 0$, $7x_2 = 7$, $x_2 = 1$

Reportons dans la première equation $2x_1 + x_2 - 5 = 0$

nous obtenons $2x_1 + 1 - 5 = 0$, $2x_1 - 4 = 0$, $2x_1 = 4$,

$x_1 = 2$. Le seul point critique possible est $(2, 1)$.

Il convient $4 + 1 - 5 = 0$ $\quad 2 + 4 - 6 = 0$

Donc, f admet $(2, 1)$ comme seul point critique

<u>Proposition :</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$

Nous supposons que f admet des dérivés partielles d'ordre 1.

Alors si f admet en $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in U$ un maximum ou un minimum local, a est un point critique de f.

C'est à dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, .., a_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, .., a_n) = 0$$

<u>Exemple (suite)</u> : $\mathbb{R}^2$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si la fonction polynomiale $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 6x_2$ admet un maximum ou un minimum local en $a = (a_1, a_2)$ c'est que a est un point critique de f, donc suivant notre calcul $a = (2, 1)$. Maintenant la proposition ne dit pas qu'en un point critique, il y a maximum ou minimum local. Donc, nous ne pouvons pas conclure avec cette proposition si en $(2,1)$ il y a un maximum ou un minimum local

<u>Remarque</u> : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = x^3$ Son seul point critique est l'origine et en 0 g n'a pas de maximum et de minimum local.

2) Dérivées partielles d'ordre ≥ 2

$I \subset \mathbb{R}$ ouvert

Rappel : $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x)$ fonction numérique d'une variable

Nous supposons f dérivable. Si f' est dérivable, nous disons que f admet une dérivée seconde. La dérivée de f' est notée f''. Si f'' est dérivable, nous disons que f admet une dérivée troisième. La dérivée de f'' est notée f'''. Etc ...

Exemple : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

f admet sur $\mathbb{R}^*$ des dérivées de tout ordre :

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$

Soit maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction numérique

$f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$

Nous supposons que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i.

Soit $j \in \{1, 2, .., n\}$. Si elle existe nous notons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à x_j

Nous notons aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ la dérivée partielle par rapport à x_i de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f

Nous pouvons continuer. Nous appelons dérivée partielle d'ordre 3 de f :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)}{\partial x_k}.$$

Etc.

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2 x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_2 x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 3x_2 x_1 - 4x_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{3}{2} x_1^2 - 4x_1 + 1 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^3 - 2x_1^2 + x_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = \dfrac{3}{2}x_1^2 - 4x_1 + 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

Proposition : Une fonction polynomiale de plusieurs variables admet dérivées partielles à tout ordre. Ces dérivées partielles sont encore des fonctions polynomiales

Une fonction rationnelle de plusieurs variables admet des dérivées partielles de tout ordre sur son domaine de définition (qui est un ouvert). Ces dérivées partielles sont des fonctions rationnelles définies sur le même ouvert.

Proposition : (Identité de Schwarz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots x_n)$

Nous supposons que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U. Alors, pour tout $i,j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque : L'identité de Schwarz est vérifiée en particulier pour les fonctions polynomiales ou rationnelles.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$

1) Montrer que f est défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera

2) Calculer les dérivés partielles d'ordre 1 et 2 de f et constater que l'identité de Schwarz est vérifiée

Réponse : 1) f est défini sur $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\}$
U est défini par une fonction polynomiale et $\neq$. C'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \dfrac{-4x_2}{(x_1 + x_2)^3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^3} \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-2x_1}{(x_1 + x_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \frac{4x_1}{(x_1 + x_2)^3}$$

Nous constatons bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$.

3) Problème de maximum et minimum sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$
Nous supposons que f admet des dérivées partielles d'ordre 1.
Nous avons vu que si f admet un maximum ou un minimum local en (a_1, a_2), alors (a_1, a_2) est un point critique de f, c.a.d :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

Sans autre hypothèse, cette condition ne permet d'assurer que f a réellement un maximum ou un minimum local en (a_1, a_2).

<u>Proposition :</u> $f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

nous supposons que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U. Soit (a_1, a_2) un point critique de f c.a.d

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

1) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)\right)^2 > 0$

Alors f a un maximum ou un minimum local en (a_1, a_2)

Si de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) > 0$, f admet en (a_1, a_2) un max. local

et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) < 0$, f admet en (a_1, a_2) un minimum local

2) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)\right)^2 < 0$

Alors f n'admet pas en (a_1, a_2) de maximum ou minimum local

3) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)\right)^2 = 0$

alors des fois oui, des fois non.

Exercice type : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2

2) Déterminer les points critiques de f

3) Quelle est la nature de ces points critiques

1) f est une fonction polynomiale, donc admet des dérivées partielles à tout ordre et ces dérivées partielles sont des fonctions continues

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 2 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 2 \end{cases}$$

2) Les points critiques de f sont les couples de réels (x_1, x_2) solution de

$$* \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0 \end{cases}$

par différence $4x_2 - x_2 + 2 - 2 = 0$, $3x_2 = 0$, $x_2 = 0$.
En reportant $x_2 = 0$ dans la première équation $2x_1 + x_2 + 2 = 0$, nous obtenons $2x_1 + 2 = 0$, $2x_1 = -2$ et $x_1 = -1$. Donc si (a_1, a_2) est un point critique : $(a_1, a_2) = (-1, 0)$. Comme $(-1, 0)$ est bien solution de $*$, $(-1, 0)$ est le seul point critique de f.

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(-1,0)\right)^2 = 2 \times 2 - (1)^2 = 3 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,0) = 2 + 2 = 4$

Donc, en $(-1, 0)$ f admet un minimum local. Cela signifie qu'il existe un petit disque centré en $(-1, 0)$ sur lequel f admet en $(-1, 0)$ une valeur minimale

4) Problème d'extremum avec contrainte :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit $H \subset \mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in H$.

1) Nous disons que f est maximum en $(a_1, ... a_n)$ sur H si la restriction de f à H admet un maximum en $(a_1, .., a_n)$. C'est à dire si pour tout $(x_1, .., x_n) \in H$; $f(x_1, .., x_n) \leqslant f(a_1, .., a_n)$;

2) Nous disons que f est minimum en $(a_1, .., a_n)$ sur H si la restriction de f à H admet un minimum en $(a_1, .., a_n)$. C'est à dire si pour tout $(x_1, .., x_n) \in H$: $f(x_1, .., x_n) \geqslant f(a_1, .., a_n)$

3) Nous disons que f admet en $(a_1, .., a_n)$ un maximum local sur H, si la restriction de f à H admet en $(a_1, .., a_n)$ un maximum local, c'est à dire s'il existe $r > 0$ réel tel que si $x = (x_1, .., x_n) \in H \cap B(a, r)$ alors $f(x_1, .., x_n) \leqslant f(a_1, .., a_n)$

4) Nous disons que f admet en $(a_1, a_2, .., a_n)$ un minimum local sur H si la restriction de f à H admet en $(a_1, .., a_n)$ un minimum local, c'est à dire s'il existe $r > 0$ réel tel que si $(x_1, .., x_n) \in H \cap B(a, r)$ alors $f(x_1, .., x_n) \geqslant f(a_1, .., a_n)$

Au lieu de dire sur H, nous disons aussi sous la contrainte $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$.

<u>proposition :</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$g : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto g(x_1, x_2, .., x_n)$

Nous supposons que f et g ont des dérivées partielles continues sur U.

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $H = \{(x_1, .., x_n) \in U$ tel que $g(x_1, .., x_n) = k\}$

Soit $a = (a_1, .., a_n) \in H$: Si f admet en $a = (a_1, .., a_n)$ un maximum ou un minimum local sur H alors

1) soit $(a_1, .., a_n)$ est un point critique de g

2) soit il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1, .., a_n, \lambda_0)$ est un point critique de $h : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) \mapsto h(x_1, .., x_n, \lambda) = f(x_1, .., x_n) + \lambda\,(g(x_1, .., x_n) - k)$$

équation de H

Remarque : Le lecteur remarquera que h a $n+1$ dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,..,x_n,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,..,x_n) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,..,x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_n}(x_1,..,x_n,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,..,x_n) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x_1,..,x_n) \\ \dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1,..,x_n,\lambda) = g(x_1,x_2,..,x_n) - k \end{cases}$$

Remarque (pour $n=2$) : Les conditions 1 et 2 sont équivalentes à :

$g(a_1,a_2)=k$ (c.a.d $(a_1,a_2)\in H$) et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2) = 0$

Exercice : Soit $U = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1>0$ et $x_2>0\}$

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Représenter U.

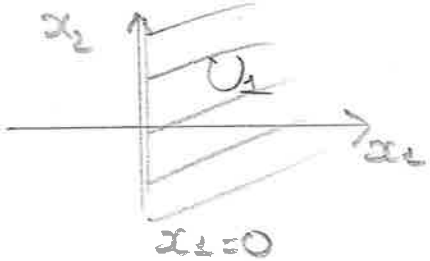
2) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ défini par $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$

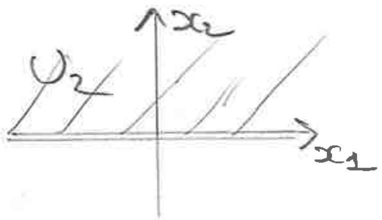
$g : U \to \mathbb{R}$ défini par $g(x_1,x_2) = x_1+x_2$

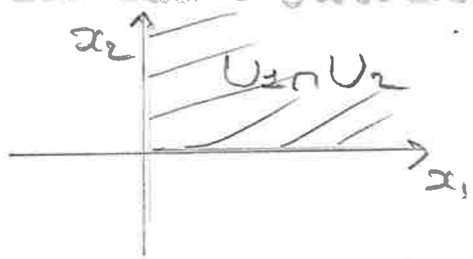
$H = \{(x_1,x_2)\in U$ tel que $g(x_1,x_2)=1\}$. Représenter H.

Nous supposons que f admet en $(a_1,a_2)\in H$ sur H un maximum. Déterminer (a_1,a_2).

Solution : Les demi-plans $U_1 : x_1 > 0$ $U_2 : x_2 > 0$ définis par des inégalités strictes sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Comme $U = U_1 \cap U_2$ U est ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$

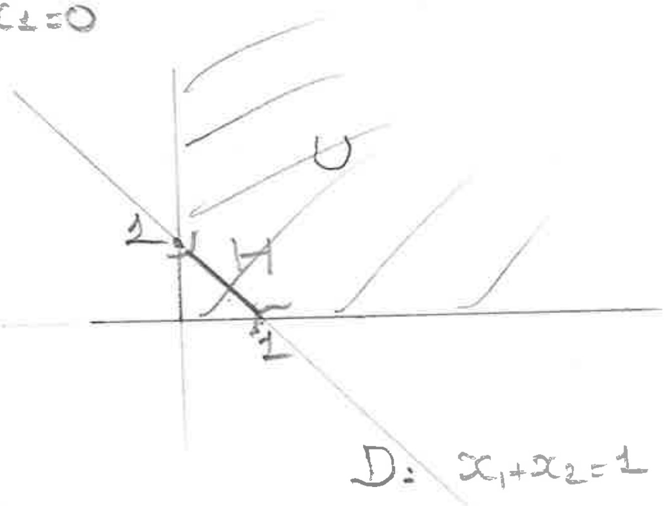






$U_1 \cap U_2$ est le $\frac{1}{4}$ plan "sans son bord"

2)



H est formé des points de U sur la droite D d'équation $x_1 + x_2 = 1$

$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}$

$g(x_1, x_2)$ $\qquad \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 1$ $\qquad \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1$

donc g n'a pas point critique

Nous sommes sous les hypothèses. Donc si $(a_1, a_2) \in H$ est un point de H où f est maximum sur H, il existe λ_0 tel que (a_1, a_2, λ) point critique de h

$h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, \lambda) \mapsto h(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} + \lambda \\ \dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 - 1 \end{cases}$$

Les points critiques de h sont les (x_1, x_2, λ) tels que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}} + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0$$

La première équation donne :

$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = -\lambda$, $\frac{1}{4x_1} = \lambda^2$, $1 = 4x_1\lambda^2$, $x_1 = \frac{1}{4\lambda^2}$

La deuxième équation donne :

$\frac{1}{2\sqrt{x_2}} = -\lambda$ $\frac{1}{4x_2} = \lambda^2$, $1 = 4x_2\lambda^2$ $x_2 = \frac{1}{4\lambda^2}$

En reportant dans le troisième équation, nous obtenons

$x_1 + x_2 = 1$, soit $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1$, soit $\frac{2}{4\lambda^2} = 1$, soit $\frac{1}{2\lambda^2} = 1$,

soit $1 = 2\lambda^2$ et $\lambda^2 = \frac{1}{2}$.

Nous obtenons $x_1 = \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{4 \times 1/2} = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{2}$

Donc, nécessairement les points critiques de R sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Donc, $\boxed{(a_1, a_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

5 Fonction numérique continue

<u>Proposition (une variable)</u> : Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Soit $a < b$ deux réels avec $[a,b] \subset I$
Il existe au moins un $\alpha \in [a,b]$ tel que f sur $[a,b]$ est minimum en α : $\forall x \in [a,b] \quad f(\alpha) \leq f(x)$
Il existe au moins un $\beta \in [a,b]$ tel que f sur $[a,b]$ est maximum en α : $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq f(\beta)$
Notons m la valeur minimale de f sur $[a,b]$: $m = f(\alpha)$
M la valeur maximale de f sur $[a,b]$: $M = f(\beta)$
Alors $[m,M] = \{ f(x)$ tels que $x \in [a,b] \}$. C'est à dire que f prend en des points de $[a,b]$ toute valeur comprise entre m et M. En particulier f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

<u>Corollaire</u> $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue
Soit a, b deux réels avec $[a,b] \subset I$. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne s'annule pas, il existe au moins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$

<u>Proposition :</u> Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Alors il existe $a = (a_1, .., a_n) \in A$ tel que f est maximum en a :
c.a.d pour tout $x = (x_1, .., x_n) \in A$ $\quad f(x) \leq f(a)$

2) Alors il existe $b = (b_1, .. b_n) \in A$ tel que f est minimum en b
c.a.d pour tout $x = (x_1, .., x_n) \in A$ $\quad f(b) \leq f(x)$

<u>Exemple :</u> $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
$f : A \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_2$

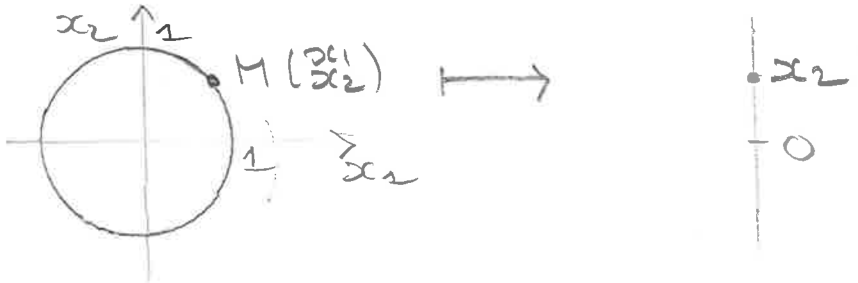
1) Représenter A. Montrer que A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$

2) Montrer qu'il existe un point de A où f est maximum et un point de A où f est minimum (en utilisant la proposition)

1) Rappelons que M est un point de coordonnées (x_1, x_2) : $OM^2 = x_1^2 + x_2^2$. Donc $(x_1, x_2) \in A$ équivaut à $OM^2 = 1$. Donc, équivaut au fait que M est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

A est borné car contenu dans la boule de centre O et de rayon 2 $B(0,2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 < 4\}$

A est fermé car défini par une fonction polynomiale ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$) et une égalité $(=1)$.



L'application f peut être vue comme la fonction altitude sur le cercle. f est continue car c'est la restriction à A d'une fonction polynomiale ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto x_2$)
Nous sommes sous les hypothèses de la proposition qui nous permet d'affirmer qu'en un point de A f admet une valeur (de même une valeur minimum). Nous

vérifier comme le suggère le dessin qu'en $(0, 1)$ f admet une valeur maximum et en $(0, -1)$ une valeur minimum