Exercice sur le support 3

Exercice 1 : On considère la droite D du plan d'équation

$$D : \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{5} x_2 = 1$$

1) Représenter D

2) Représenter $A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geqslant 0 \text{ et } x_2 \geqslant 0 \}$

   Représenter $D \cap A$

Solution : D est une droite.

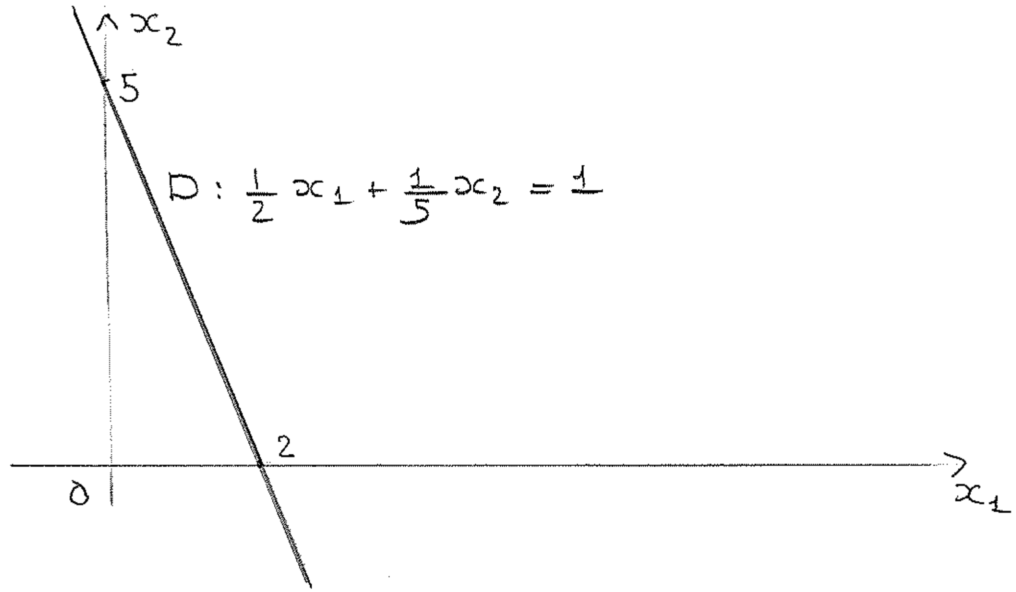
Un point de coordonnée $(0, x_2)$ est sur D si et seulement si

$$\frac{1}{2} 0 + \frac{1}{5} x_2 = 1$$

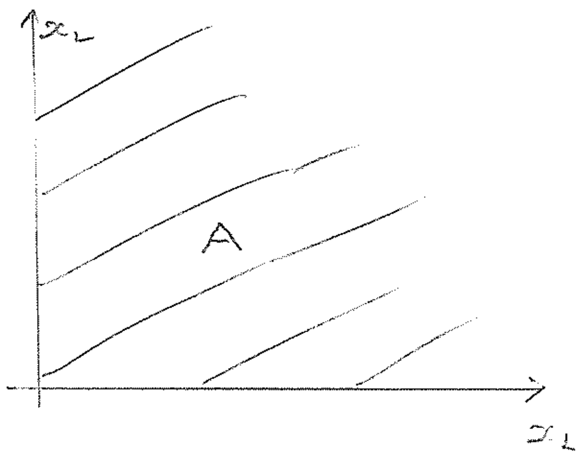
donc si et seulement si $\frac{1}{5} x_2 = 1$, c'est à dire $x_2 = 5$.

Ainsi le point de coordonnées $(0, 5)$ appartient à D.

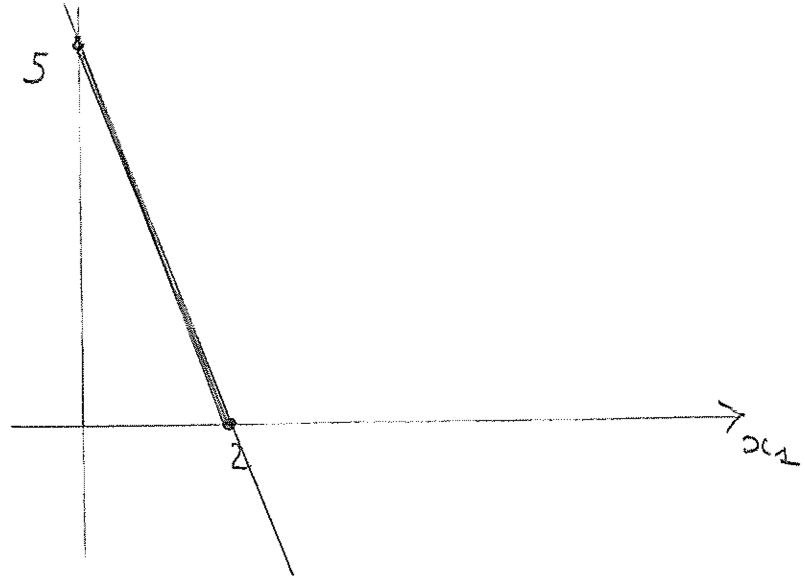
De même, on montre que le point de coordonnées $(2, 0)$ appartient à D. Ainsi, D est la droite passant par les points de coordonnées $(0, 5)$ et $(2, 0)$.



2)



A zone hachurée



$D \cap A$ est le segment joignant les points de coordonnées $(2,0)$ et $(0,5)$.

<u>Exercice 2 :</u> $P_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 > 1\}$

$P_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 < 2\}$

$P_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - 3x_2 \leqslant 0\}$

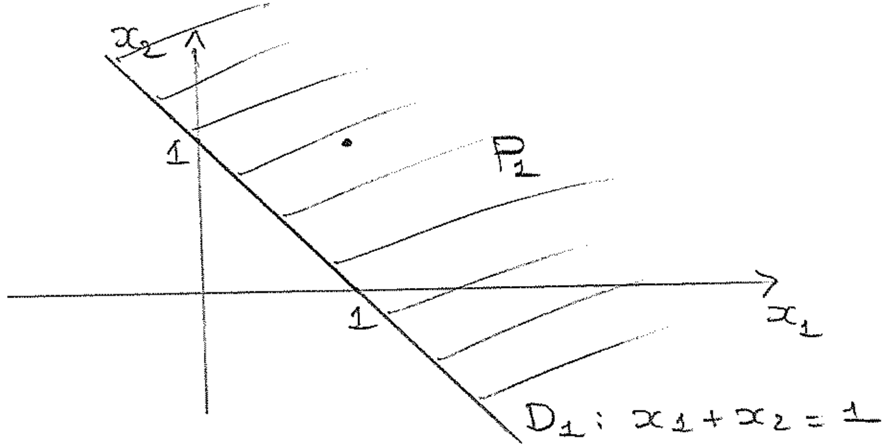
$P_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x_1 - x_2 \geqslant 0\}$

1) Représenter P_1, P_2

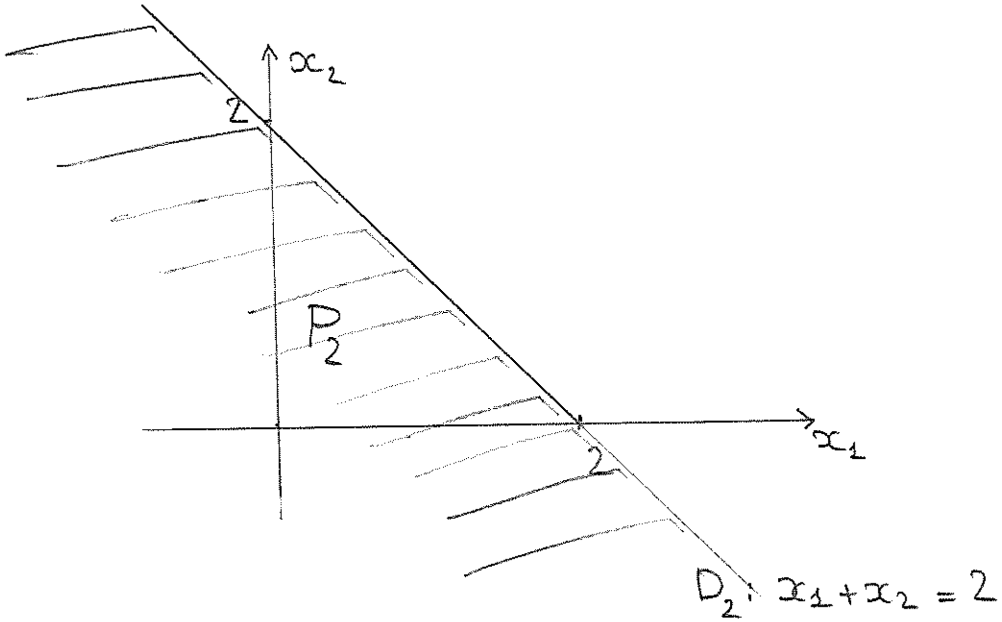
2) Représenter P_3, P_4

3) Représenter $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$

<u>Solution :</u> P_1 est le demi-plan d'équation $x_1 + x_2 > 1$.
C'est l'ensemble des points du plan formé des points strictement d'un même coté de la droite D_1 d'équation $x_1 + x_2 = 1$.
La droite D_1 est la droite joignant les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$. Le point de coordonnée $(1,1)$ appartient à P_1 puisque $1 + 1 > 1$. On obtient :



P_1 zone hachurée
(points strictement au dessus de D_1)

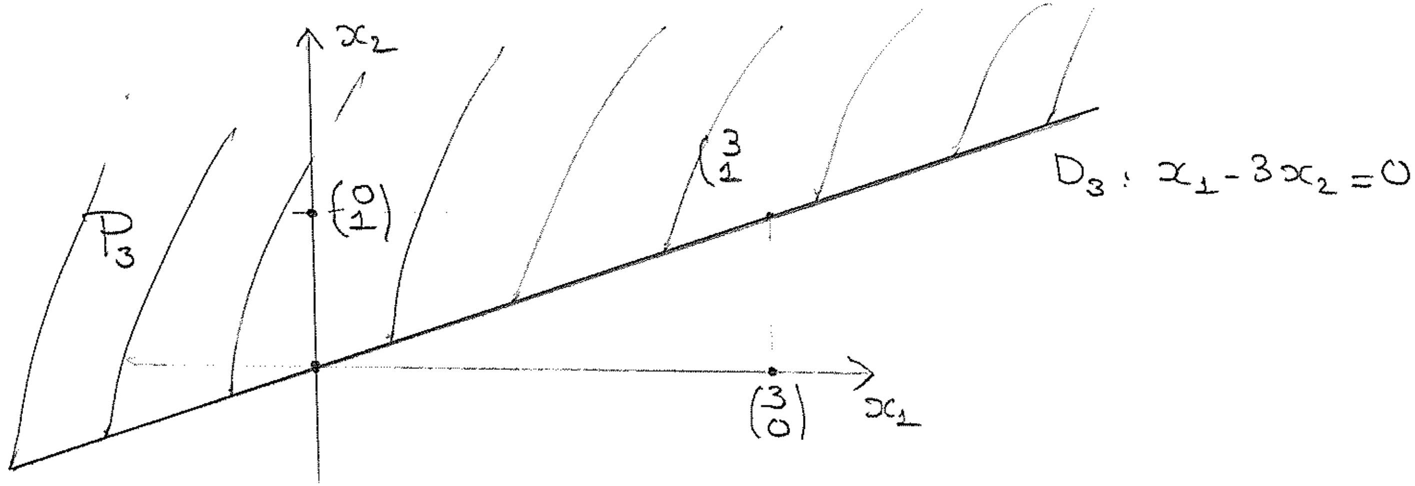


$(0,0) \in P_2$
D_2 droite d'équation $x_1 + x_2 = 2$ est la droite passant par les points de coordonnées $(0,2)$ et $(2,0)$

P_2 zone hachurée
(points strictement en dessous de D_2)

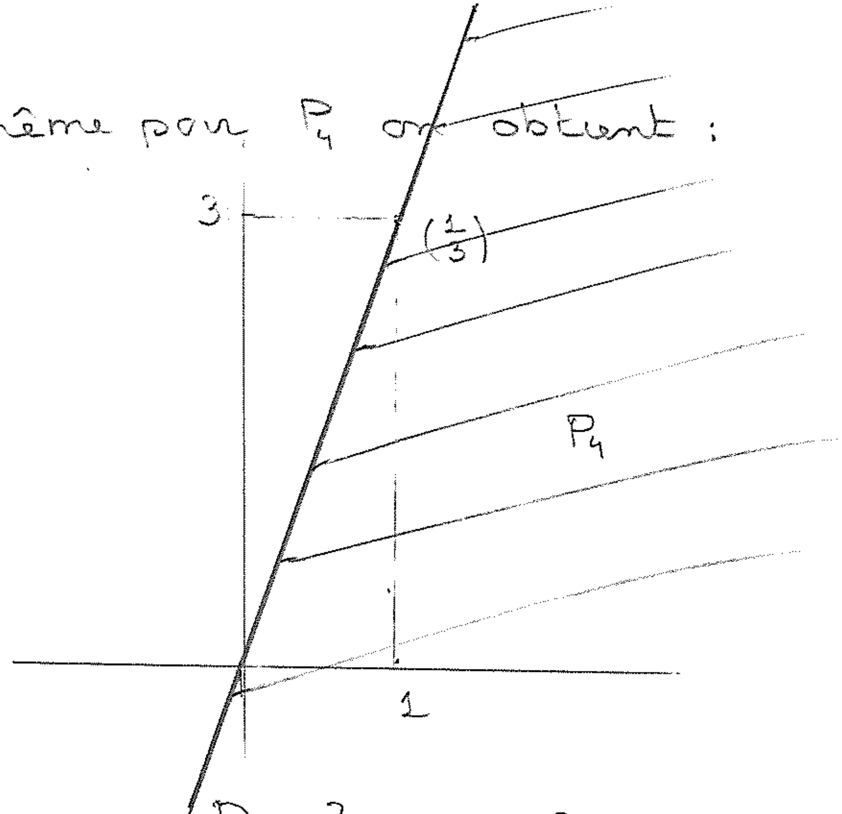
On remarquera que les droites D_1 et D_2 sont parallèles

2) P_3 est le demi-plan d'équation $x_1 - 3x_2 \leqslant 0$. Il est constitué des points situés d'un même coté de la droite D_3 d'équation $x_1 - 3x_2 = 0$ (y compris des points de cette droite). On observe que $(0,1) \in P_3$ car $0 - 3\times 1 = -3 \leqslant 0$.
D'autre part, D_3 est la droite qui passe par l'origine $(0,0)$ et par le point de coordonnées $(3,1)$.



P_3 zone hachurée $\qquad (D_3 \subset P_3)$

De même pour P_4 on obtient :



$D_4 : 3x_1 - x_2 = 0$

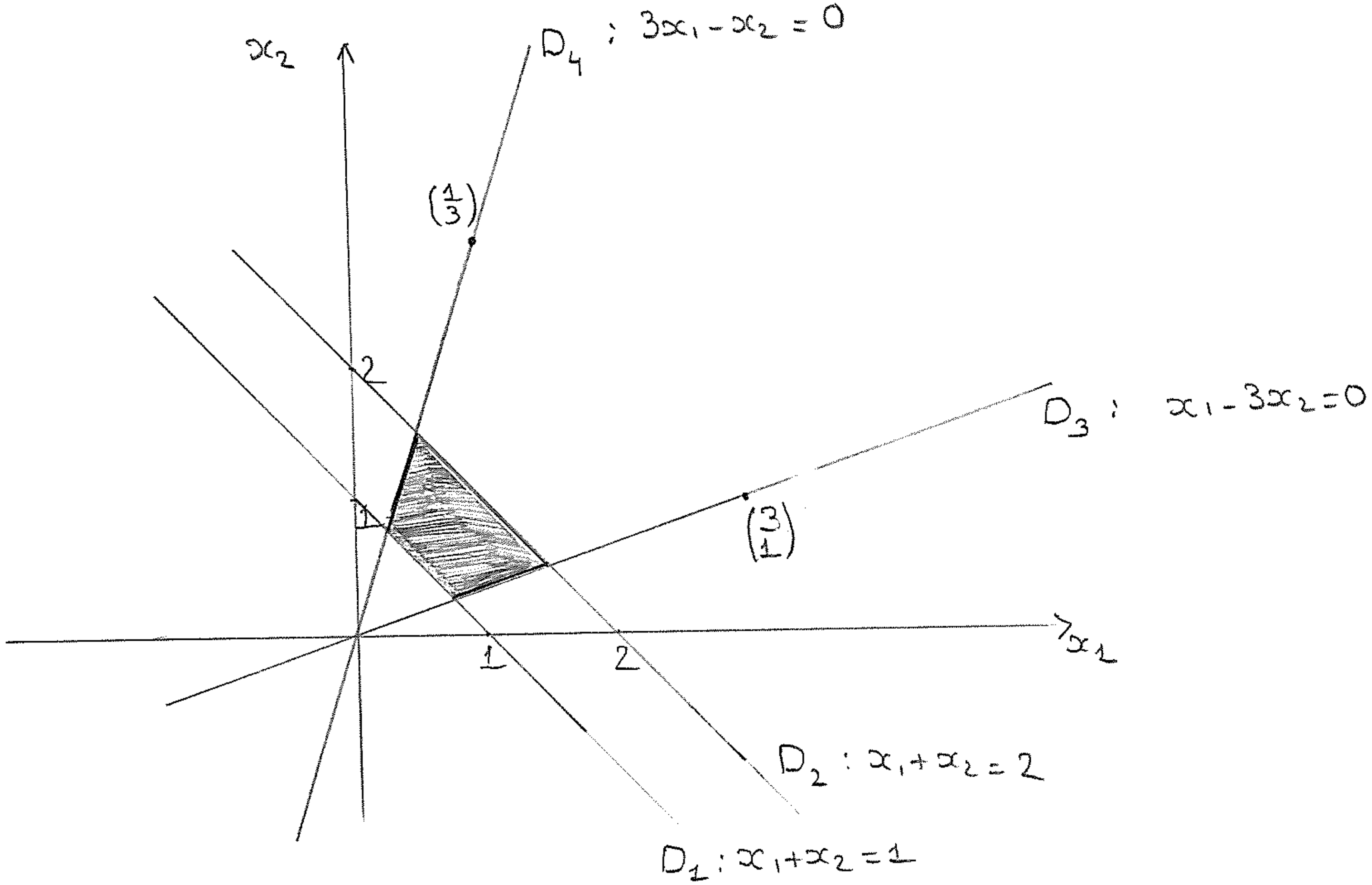
P_4 zone hachurée $\qquad D_4 \subset P_4$

$(1,0) \in P_4$

P_4 demi-plan délimité par la droite D_4 d'équation

$$3x_1 - x_2 = 0$$

D_4 passe par l'origine et par le point de coordonnées $(1,3)$.

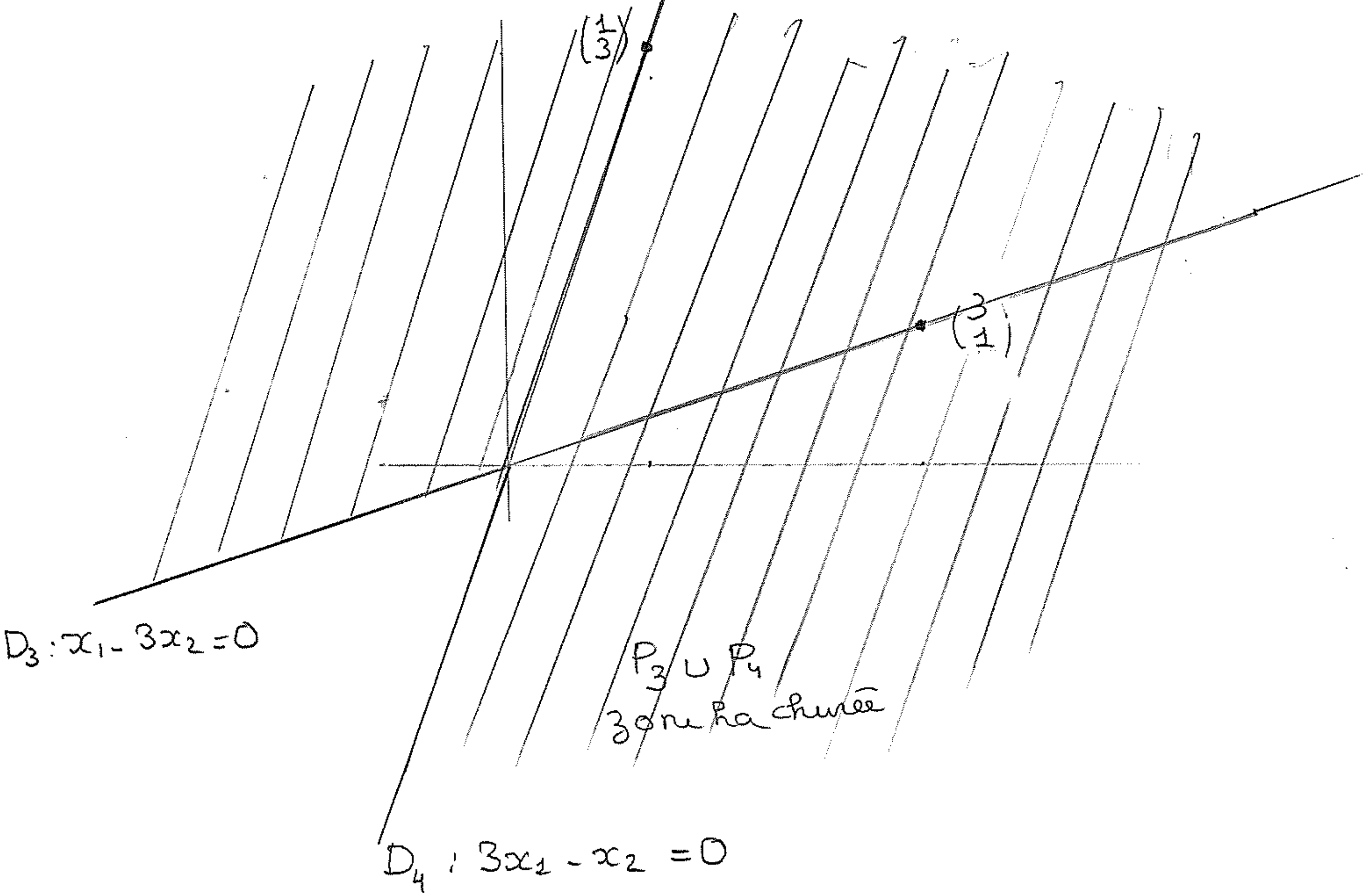


$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ zone hachurée

Exercice 2 (suite)

3) Représenter $P_3 \cup P_4$

4) Caractériser $\mathbb{R}^2 - P_3$ et représenter cet ensemble

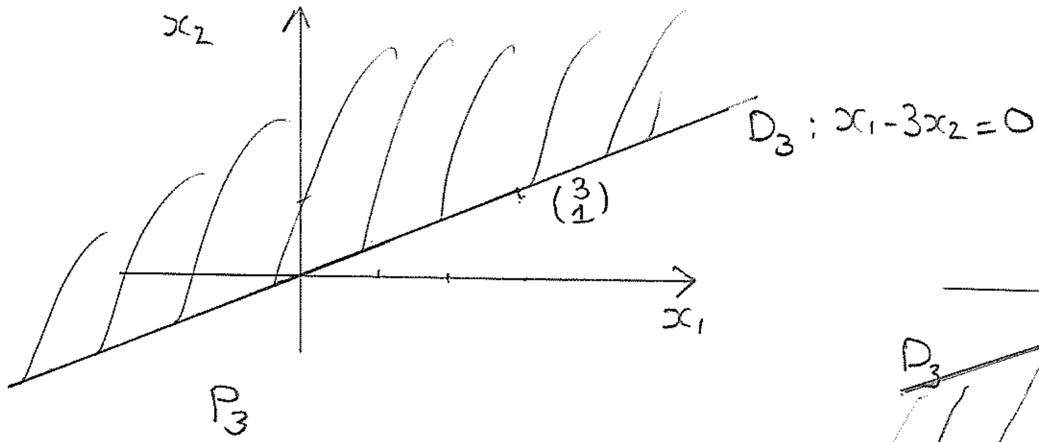


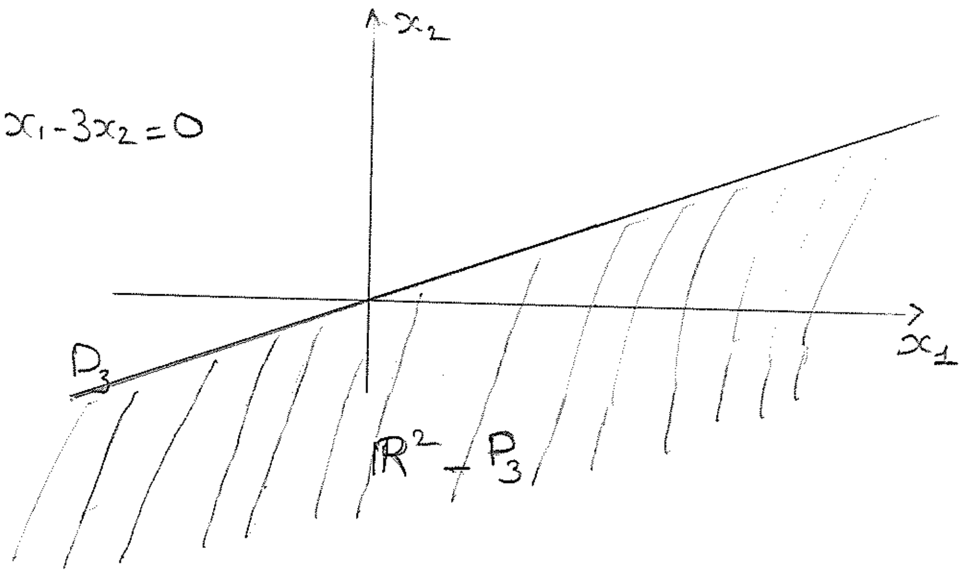
4) $\mathbb{R}^2 - P_3$ est formé des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas dans P_3

Ainsi $\mathbb{R}^2 - P_3 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - 3x_2 > 0\}$

C'est le demi-plan d'équation $x_1 - 3x_2 > 0$ constitué des points situés strictement du même côté de la droite $D_3 : x_1 - 3x_2 = 0$

Ce demi-plan contient le point $(1,0)$





Exercice 3 :

1) Soit $a = (4,1)$, $b = (7,5)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ quelle est la distance de a à b

2) Quel est l'équation du cercle de centre a et de rayon 5 ? du disque de centre a de rayon 5

3) Représenter $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 > 4\}$

Solution : 1) Soit $d(a,b)$ cette distance, par définition

$$d(a,b) = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

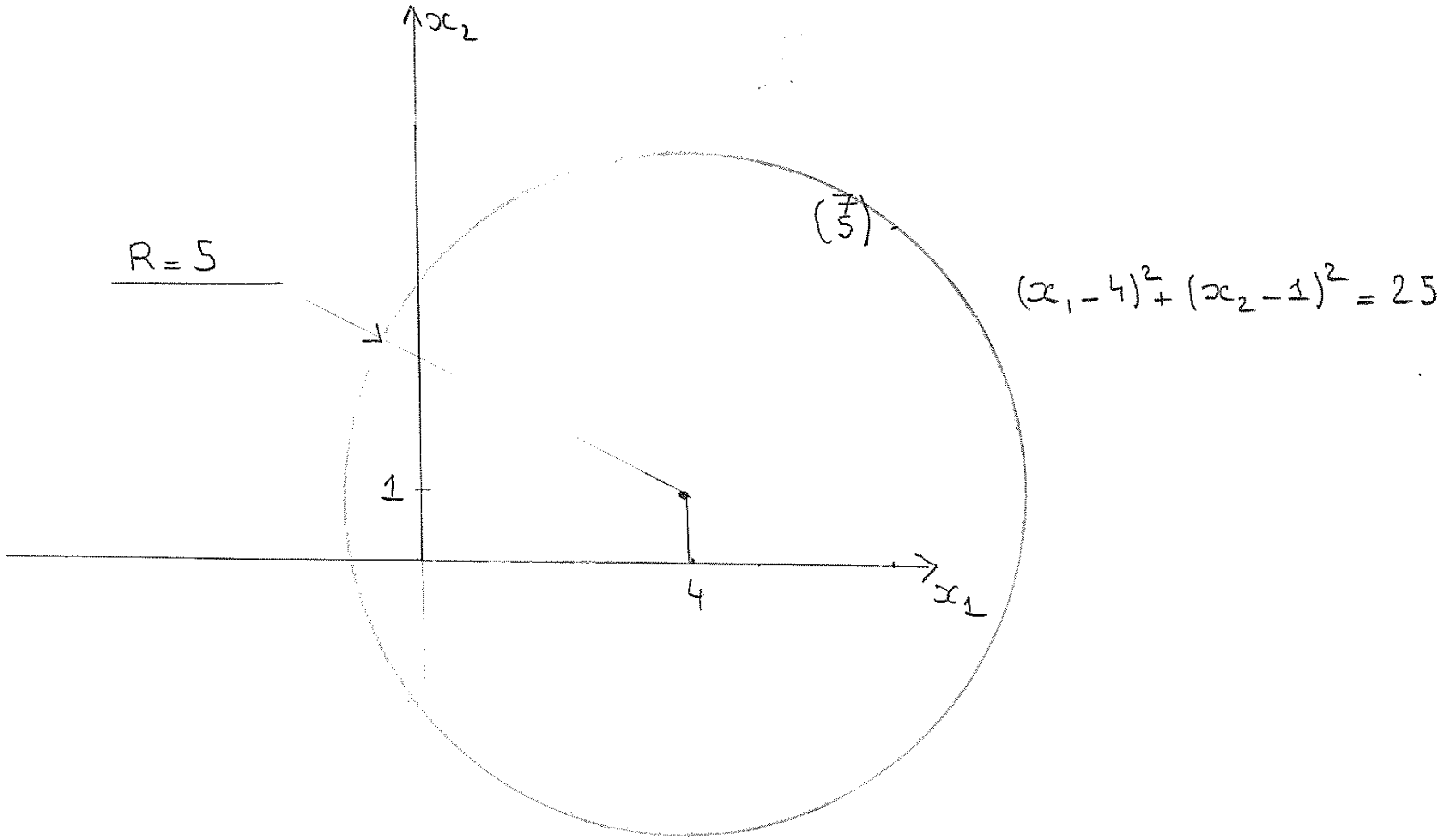
2) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, x appartient au cercle de centre a et de rayon 5 si et seulement si

$$d(x, a) = 5$$

soit si et seulement si

$$\sqrt{(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2} = 5.$$

Cette équation équivaut à $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 = 25$.

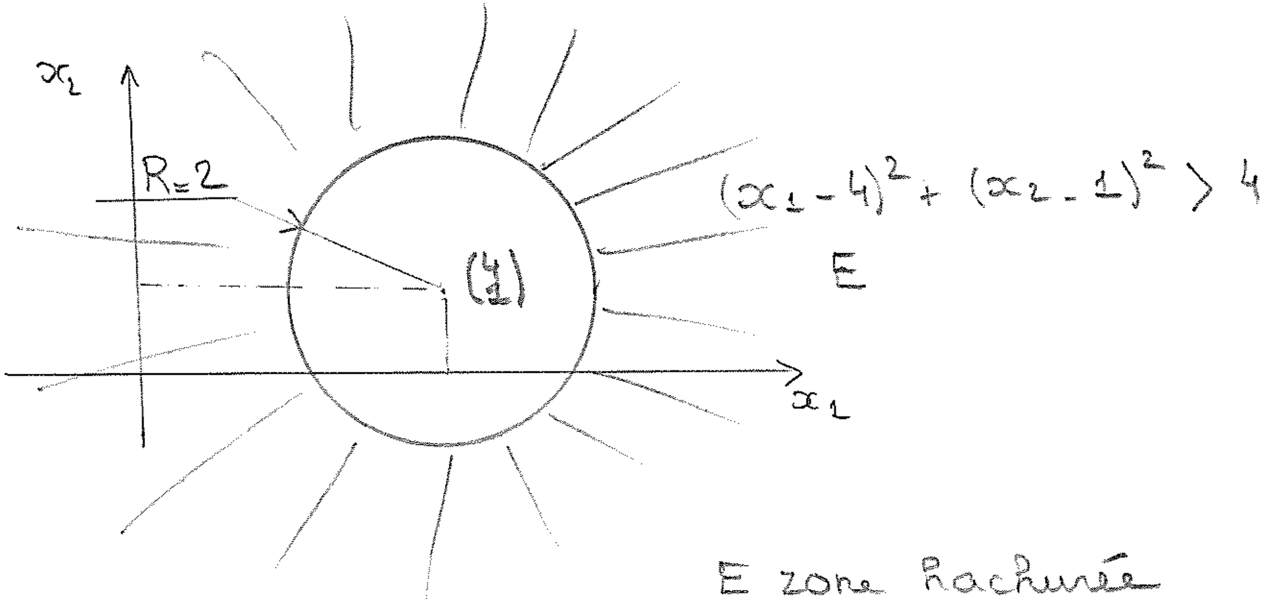


3) Soit $x = (x_1, x_2)$, $(d(x,a))^2 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2$

Les éléments de E sont les $x = (x_1, x_2)$ tels que

$d(x,a)^2 > 4$, soit $d(x,a) > 2$

Géométriquement, ils correspondent aux point M à une distance strictement plus grande de 2 du point de coordonnées $(4, 1)$.



E zone hachurée

Exercice 4 : Quelle est la distance de $a = (-2, 1, 3)$, $b = (-4, 2, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$?
Quelle est l'équation de la boule centre a et de rayon $1/10$.

Solution :

$$d(a,b) = \sqrt{(-2-(-4))^2+(1-2)^2+(3-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

$$(x_1+2)^2+(x_2-1)^2+(x_3-3)^2 < \frac{1}{100}$$

Exercice 5

1) $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + \frac{1}{2} x_2 > 1\}$
Représenter E et montrer que E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

2) $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + \frac{1}{2} x_2 \geqslant 2\}$
Représenter F et montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$

3) $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ $x_1 + \frac{1}{2} x_2 < 2\}$

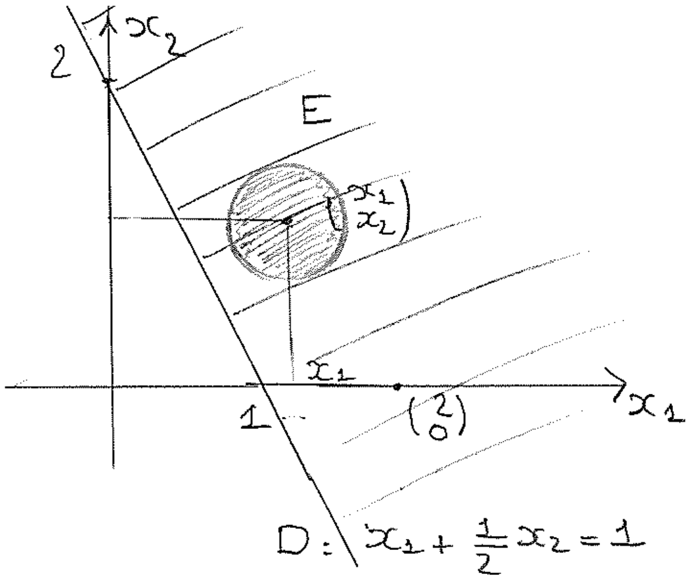
Soit $T_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0\}$

$T_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — $x_2 > 0\}$

$T_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + \frac{1}{2} x_2 < 2\}$

Représenter T_1, T_2, T_3. Montrer que T_1, T_2, T_3 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$
En déduire que T est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Le sous-ensemble T de $\mathbb{R}^2$ est-il borné ?

Solution 1 : E est le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_1 + \frac{1}{2} x_2 > 1$.
Il est délimité par la droite d'équation $x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 1$.
Cette droite passe par $(1,0)$ et $(0,2)$. D'autre part, $(2,0) \in E$

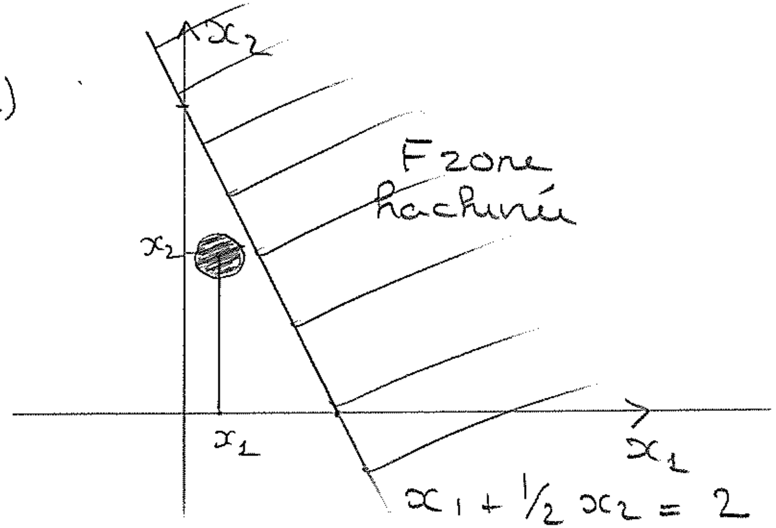


E zone hachurée

Si $(x_1, x_2) \in E$, $x_1 + \frac{1}{2} x_2 > 1$ donc $x_1 + \frac{1}{2} x_2 \neq 1$ et (x_1, x_2) n'appartient pas à D la droite d'équation $x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 1$. Ainsi (x_1, x_2) est "à une distance non nulle" de D. On en déduit (voir dessin) qu'il existe un disque de centre (x_1, x_2) de rayon > 0 inclus dans E

Ainsi, E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
Plus généralement un demi-plan de $\mathbb{R}^n$ défini par une inégalité stricte est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2)



Pour montrer que F est fermé il faut montrer que le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de F est ouvert. Le complémentaire de F est la zone non hachurée

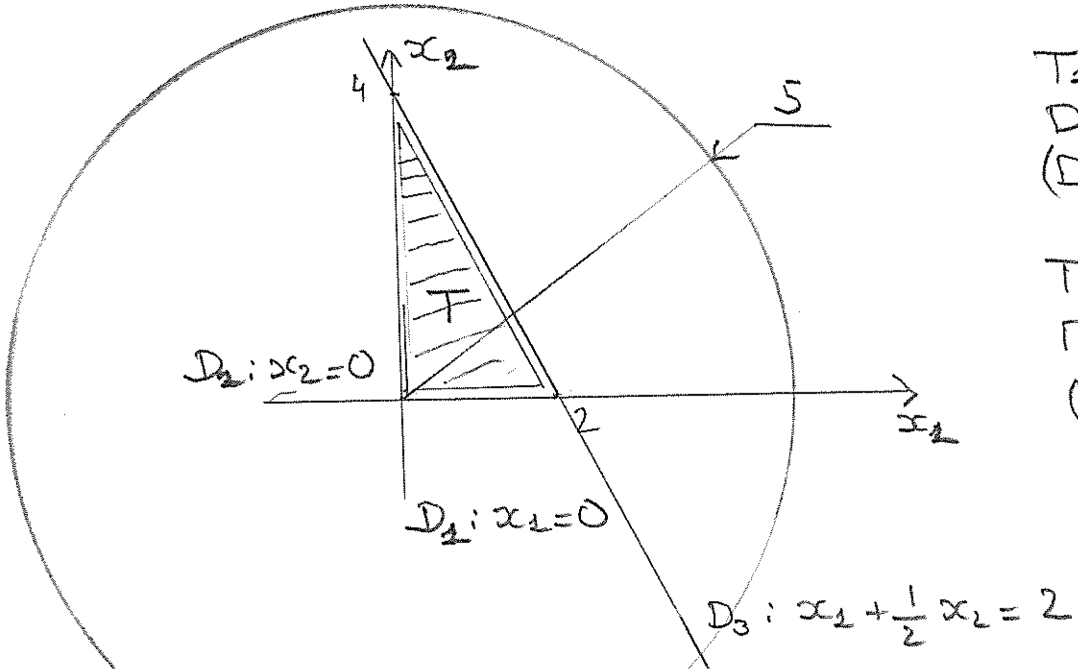
Un point (x_1, x_2) du complémentaire de F est à une certaine distance non nulle de D droite d'équation $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2$. Il existe donc un disque de centre (x_1, x_2) de rayon >0 inclus dans le complémentaire de F

Plus généralement un demi-plan de $\mathbb{R}^n$ défini par une inégalité large est un fermé de $\mathbb{R}^n$

3) T_1, T_2 et T_3 sont des ouverts, car des demi-plans de $\mathbb{R}^2$ définis par des inégalités stricts

$$T = T_1 \cap T_2 \cap T_3$$

Ainsi, T est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de 3 ouverts



T_1 demi-plan délimité par D_1 droite d'équation $x_1 = 0$ (D_1 est l'axe des x_2)

T_2 demi-plan délimité par D_2 droite d'équation $x_2 = 0$ (D_2 est l'axe des x_1)

T_2 demi-plan délimité par D_2 : $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2$

T est représenté par la zone hachurée. Cet ensemble est borné car, par exemple, il est contenu dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 5.