# Exercice sur le cours 4

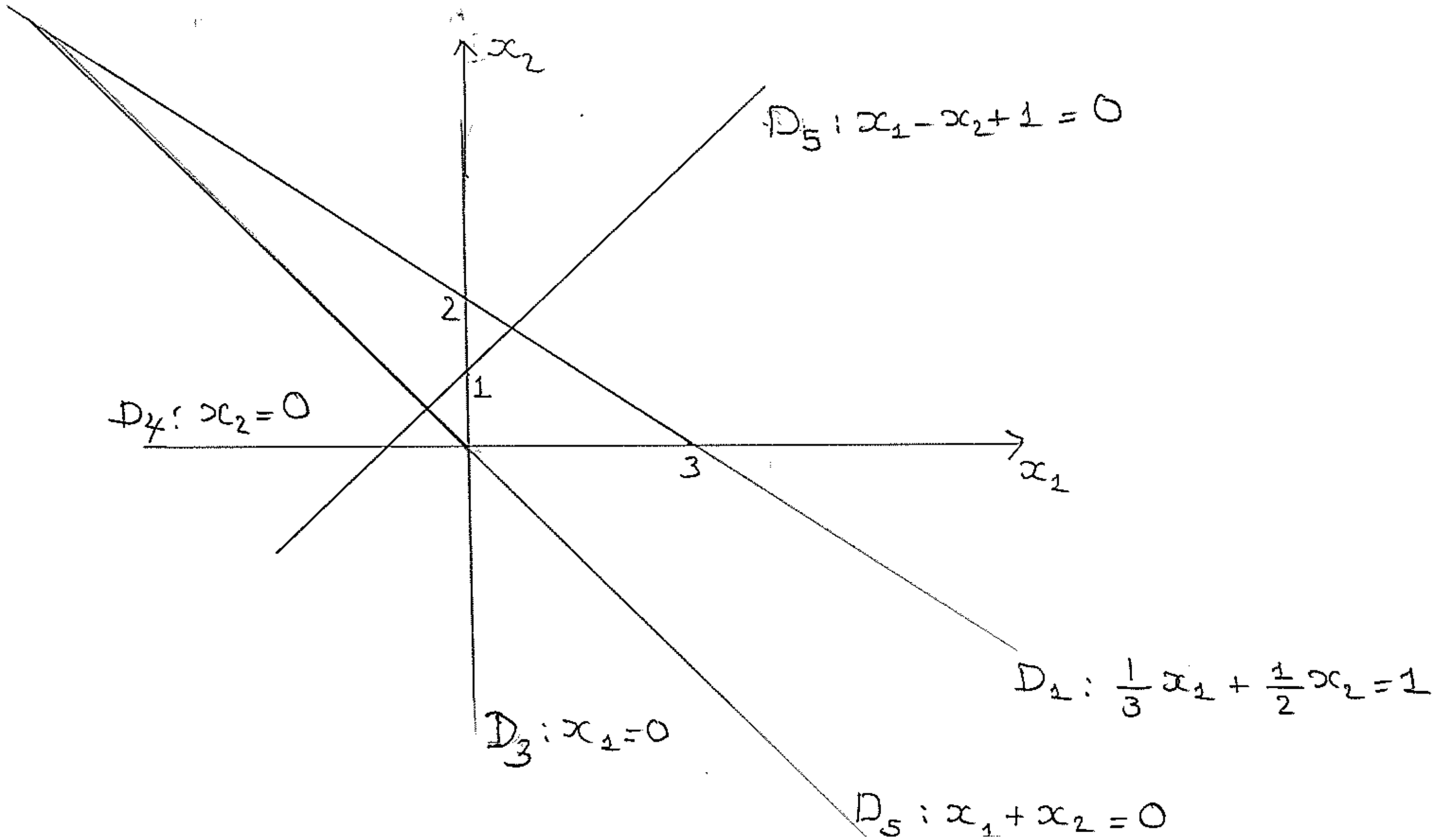
domaine de définition

**Exercice 0 :** On considère les droites suivantes :

$D_1 : \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 1$ , $D_2 : x_1 - x_2 + 1 = 0$

$D_3 : x_1 = 0$ , $D_4 : x_2 = 0$ , $D_5 : x_1 + x_2 = 0$ .

Représenter ces droites :



Exercice 1 : Déterminer le domaine de définition des fonctions numériques :

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{5 + x_1^2 + x_1 x_2}{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1}$ ,

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\sqrt{1/3\, x_1 + 1/2\, x_2 - 1}}$ ,

c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto h(x_1, x_2) = \ln\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1\right)$ .

Reponse a) Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de $f$ :

$$\mathcal{D}_f = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 \neq 0 \right\}$$
$= \mathbb{R}^2 - D_1$ où $D_1$ est la droite d'équation $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 = 0$.

b) Soit $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de $g$ :

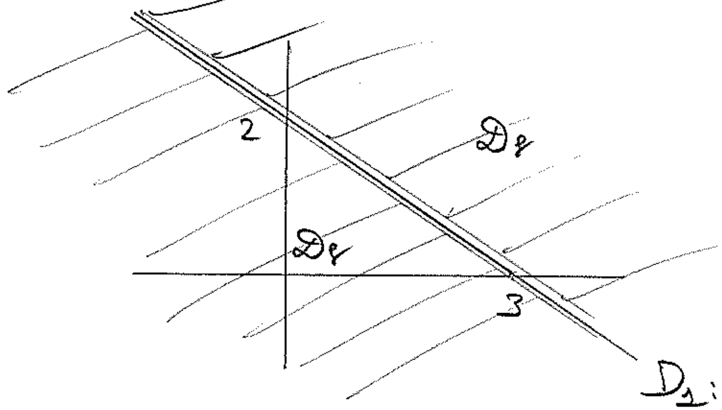
$$\mathcal{D}_g = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 > 0 \right\}$$
en effet pour que $g(x_1, x_2)$ soit défini, il faut d'une part que $\sqrt{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1}$ soit défini : $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 \geqslant 0$ ; d'autre part il faut que $\sqrt{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1}$ soit non nul.

c) On rappelle que la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ $= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x > 0\}$. Autrement dit $\ln x$ a un sens si et seulement si $x > 0$.

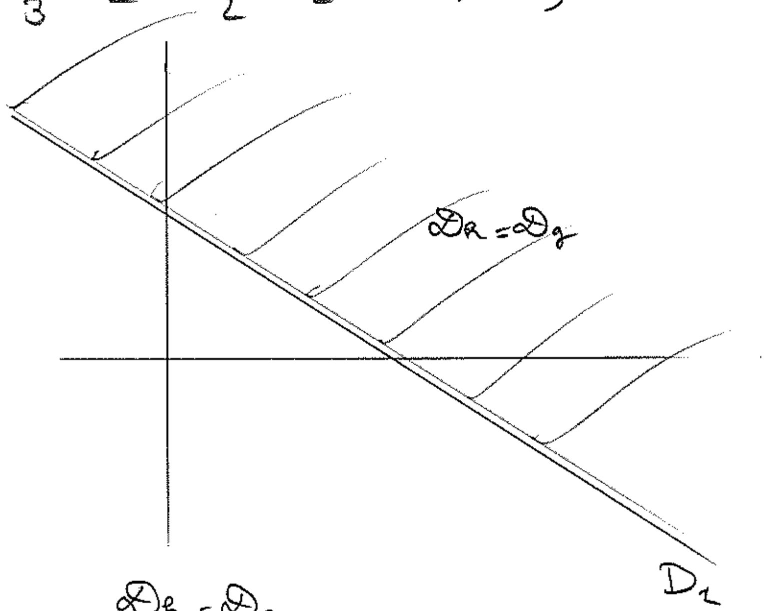
Soit $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de $h$. Nous obtenons :

$$\mathcal{D}_h = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - 1 > 0 \}$$

Ainsi $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_g$.




$\mathcal{D}_f$ zone hachurée




$\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_g$
zone hachurée
demi-plan délimité par $D_1$

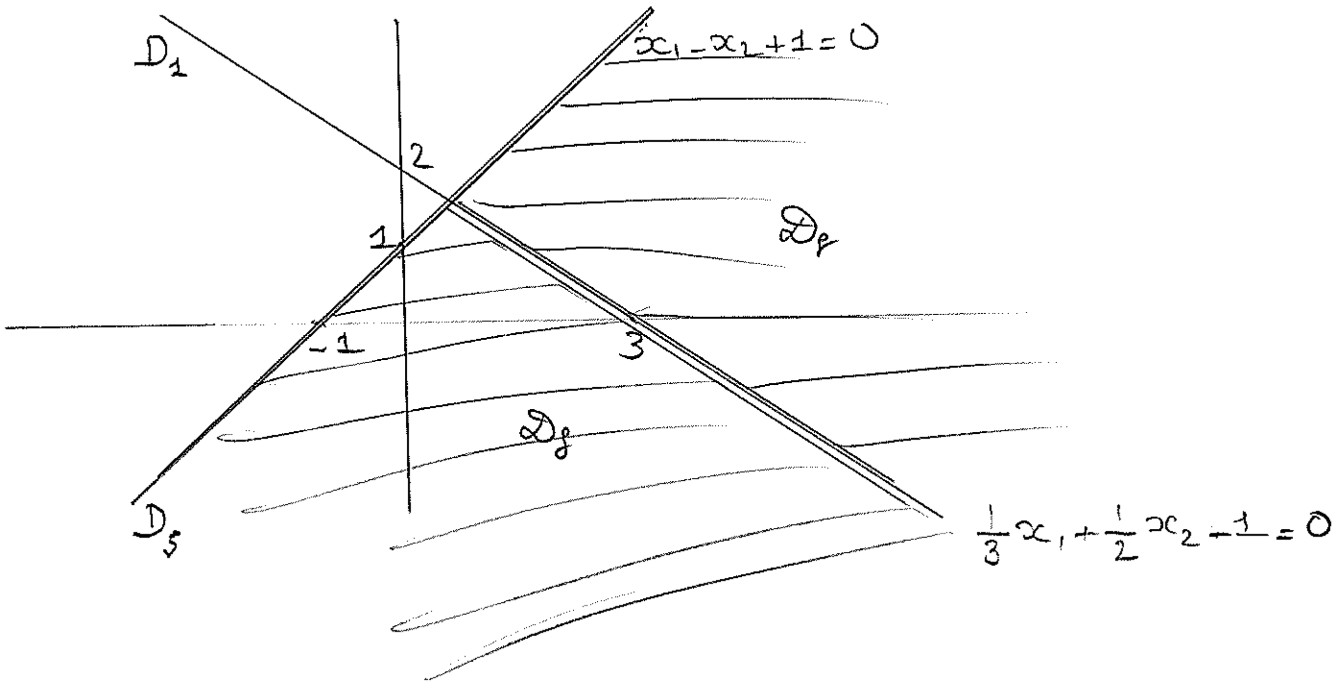
on notera que $D_1$ a été représentée à l'exercice 0, il s'agit de la droite d'équation $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1$ ou encore $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 = 0$

Exercice 2 : Soit $f$ la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{x_1 - x_2 + 1}}{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1}$

Préciser $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de $f$ et le représenter

Solution : $\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0$ et $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 \neq 0\}$

$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 1 \neq 0\}$.




$\mathcal{D}_f$ zone hachurée

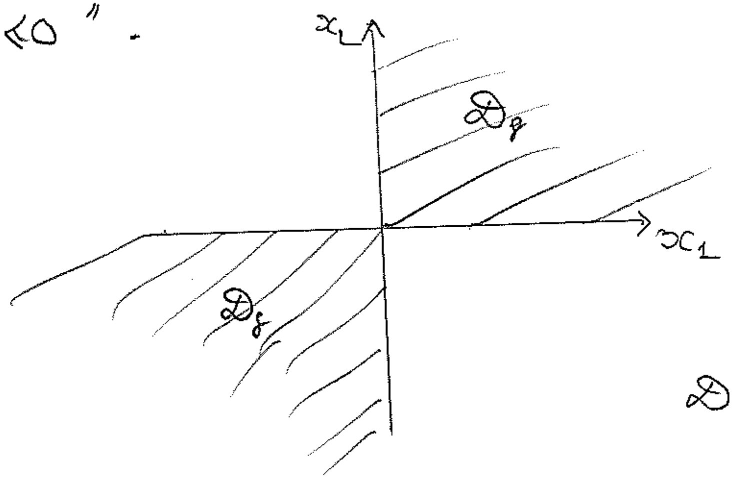
Exercice 3 : Sol

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ .

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}}{x_1 + x_2}$ ,

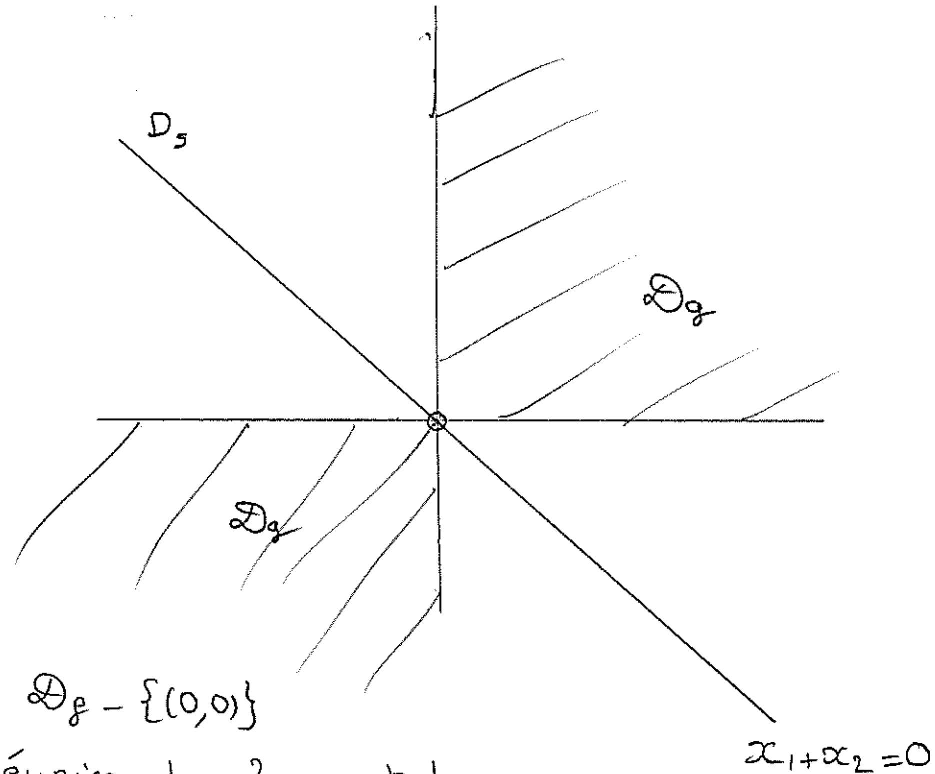
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}}{x_1^2 + x_2^2}$ .

a) $\mathcal{D}_f = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2 \geq 0 \}$ .
Or la condition $x_1 x_2 \geq 0$ équivaut à "$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$" ou "$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$".




$\mathcal{D}_f$ est la zone hachurée

b) $\mathcal{D}_g = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2 \geq 0$ et $x_1 + x_2 \neq 0 \}$
$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2 \geq 0 \} \cap \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0 \}$




$\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f - \{(0,0)\}$

"réunion des 2 quart de plan privés de l'origine"

c) On remarquera que $x_1^2+x_2^2=0$ si et seulement si $x_1=x_2=0$.

Ainsi $\mathcal{D}_h = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1x_2\geqslant 0$ et $(x_1,x_2)\neq(0,0)\}$

$= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1x_2\geqslant 0\} - \{(0,0)\}$

$= \mathcal{D}_g$ voir dessin ci-dessus.

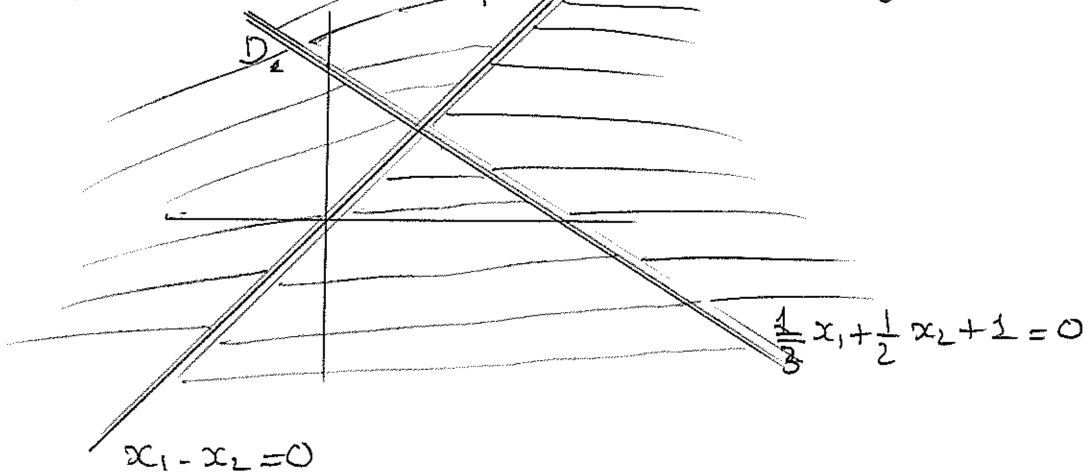
Exercice 4 : On considère les fonctions

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} + \dfrac{x_2}{\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1}$.

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4}}$.

Solution a) $\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 - x_2 \neq 0 \text{ et } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1 \neq 0\}$

$\mathcal{D}_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 + x_2 \neq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1 \neq 0\}$

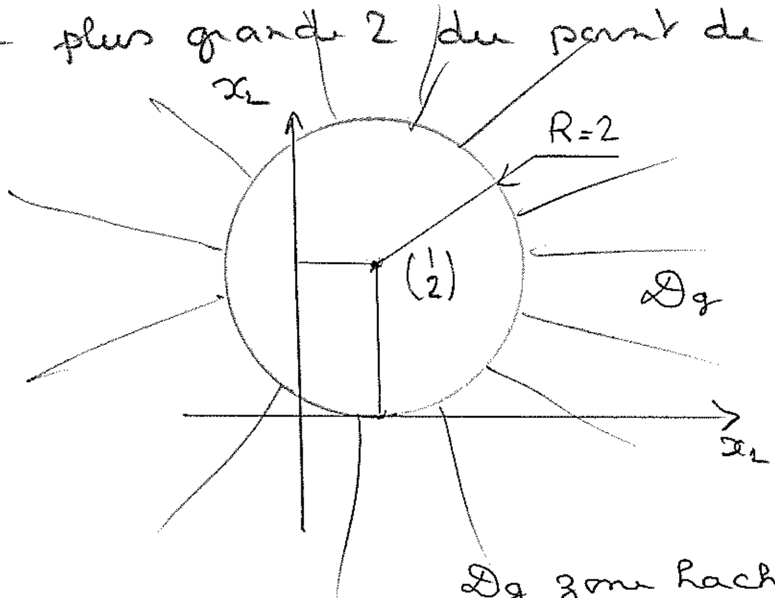



$\mathcal{D}_f$ la reunion de 4 quart du plan
zone hachurée

b) $\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 > 0\}$

$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 > 4\}$

Or $(x_1-1)^2+(x_2-2)^2=4$ est l'équation du cercle de centre $(1,2)$ et de rayon 2. L'ensemble $D_g$ est constitué des points à une distance plus grande 2 du point de coordonnées $(1,2)$.




$D_g$ zone hachurée