Exercices sur le support 5

Exercice 1 : Donner en utilisant un résultat du cours sur les fonctions numériques continues la nature du domaine de définition des fonctions numériques suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4}$

2) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^3 + 2}{\sqrt{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4}}$

3) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto h(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^2 x_2 + 3}{x_1^3 + x_1 x_2 x_3 - x_2^2 x_3}$

Solution : Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f.

$\mathcal{D}_f = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4 \geqslant 0 \}$

Or l'application : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 4$ est continue (car polynomiale). $\mathcal{D}_f$ est défini à partir d'une inégalité large ($\geqslant$) et d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, $\mathcal{D}_f$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

2) De même, soit $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g :
$\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4 > 0\}$.
Ainsi, $\mathcal{D}_g$ est défini à partir d'une inégalité stricte ($>$) et d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Le sous-ensemble $\mathcal{D}_g$ de $\mathbb{R}^2$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3) Soit $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de h :
$\mathcal{D}_h = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1^3 + x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 \neq 0\}$
Or l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^3 + x_1x_2x_3 - x_2^2x_3$ est continue (car polynomiale). $\mathcal{D}_h$ est défini à partir d'une inégalité ($\neq$) et d'une fonction continue. C'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, on peut observer que le domaine de définition d'une fonction rationnelle de n variables est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : On considère l'application :

$$f : A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^4 = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1+1)^2 + (x_2+1)^2$$

1) Préciser une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont f soit la restriction à A

2) En déduire que f est continue

3) Montrer en utilisant un résultat du cours sur les fonctions numériques continues que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$

4) Montrer que A est borné.

Solution : 1) Il suffit de prendre pour g la fonction polynomiale

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto (x_1+1)^2 + (x_2+1)^2$$

On a : $f = g_{|A}$ "restriction de g à A"

2) Comme g est polynomiale, g est continue. L'application f est continue car restriction d'une application continue

3) Posons $A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geqslant 0\}$

$A_2 = \{$ — $x_2 \geqslant 0\}$

$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — $x_1^4 + x_2^4 = 1\}$

A_1 est défini à partir d'une inégalité large ($\geqslant 0$) et de la fonction continue car polynomiale : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1$.
Ainsi A_1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
A_2 est défini à partir d'une inégalité large ($\geqslant 0$) et de la fonction continue car polynomiale : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_2$
A_3 est défini à partir d'une égalité ($=1$) et de la fonction continue car polynomiale : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^4 + x_2^4$.
Ainsi A_2 et A_3 sont également des fermés de $\mathbb{R}^2$. Or, nous avons :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

L'ensemble A est donc fermé comme intersection de 3 fermés de $\mathbb{R}^2$.

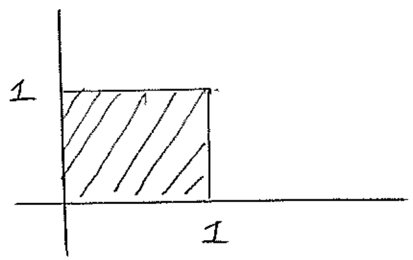
4) Si $(x_1, x_2) \in A$: $x_1^4 + x_2^4 = 1$. Nous en déduisons

$x_1^4 = 1 - x_2^4$ donc $0 \leqslant x_1^4 \leqslant 1$

$x_2^4 = 1 - x_1^4$ donc $0 \leqslant x_2^4 \leqslant 1$

Comme $(x_1, x_2) \in A$: $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$

Nous en déduisons $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ et $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$. Ainsi A est contenu dans le carré :



L'ensemble A est donc borné, car par exemple contenu dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 2.