Exercices sur les fonctions homogènes

Exercice (exam mai 2012)

Soit $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x_1 + 2x_2 \neq 0\}$

On considère l'application f défini par

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(3x_1 + 2x_2)^{13}}$$

1) Représenter graphiquement U. Montrer que U est un ensemble ouvert

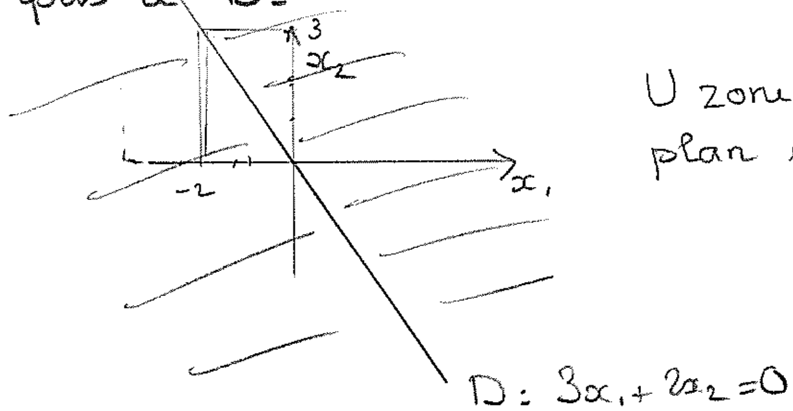
2) Montrer en utilisant la définition d'une fonction homogène que l'application f est homogène. Préciser le degré d'homogénéité de f

3) Donner la relation qui relie f à ses dérivées partielles

<u>Solution</u> : Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x_1 + 2x_2 = 0\}$

D est une droite qui passe par $(0,0)$ et par le point $(-2, 3)$ puisque $3(-2) + 2(3) = 0$ et $3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$.

U est l'ensemble des points du $\mathbb{R}^2$ qui n'appartiennent pas à D.



U zone hachurée
plan privé de D

U est défini par une fonction continue, car polynomiale $((x_1, x_2) \mapsto 3x_1 + 2x_2)$ et une inégalité $(\neq 0)$. U est donc un ouvert.

2) Soit $\lambda > 0$ et $(x_1, x_2) \in U$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2}{(3\lambda x_1 + 2\lambda x_2)^{19}}$$

$$= \frac{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2}{(\lambda(3x_1 + 2x_2))^{19}} = \frac{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2)}{\lambda^{19} (3x_1 + 2x_2)^{19}}$$

$$= \lambda^{2-19} \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{(3x_1 + 2x_2)^{19}}$$

$$= \lambda^{-17} f(x_1, x_2)$$

Donc, f est homogène de degré -17.

On pourra noté que l'on a utilisé au moins :

$(\lambda a)^2 = \lambda^2 a^2$

$(\lambda a + \lambda b)^{19} = (\lambda(a+b))^{19} = \lambda^{19} (a+b)^{19}$

$\frac{\lambda^2}{\lambda^{19}} = \lambda^{2-19} = \lambda^{-17}$

En toute rigueur, on aurait du montrer que U est un cône positif ...

3) Il s'agit de l'identité d'Euler. On y a droit car f admet des dérivées partielles continues et est homogène

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -17 f(x_1, x_2)$$

pour tout $(x_1, x_2) \in U$

Exercice : Soit $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + 2x_2 \neq 0\}$
On considère l'application v définie par

$$v : V \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto v(x_1, x_2) = \frac{5x_2 - 4x_1}{x_1 + 2x_2}$$

1) Montrer que v est homogène. Préciser le degré d'homogénéité.
2) Ecrire l'identité d'Euler
3) Calculer sur V les dérivées partielles d'ordre 1 de v
4) Vérifier l'identité d'Euler.

Solution :

1) On montre comme dans l'exercice précédent que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
Soit $\lambda > 0$ et $(x_1, x_2) \in V$

$$v(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{5(\lambda x_2) - 4(\lambda x_1)}{(\lambda x_1) + 2(\lambda x_2)} = \frac{\lambda(5x_2 - 4x_1)}{\lambda(x_1 + 2x_2)}$$
$$= \frac{5x_2 - 4x_1}{x_1 + 2x_2} = f(x_1, x_2)$$
$$= 1 \times f(x_1, x_2) = \lambda^0 f(x_1, x_2)$$

(par convention $\lambda^0 = 1$). Ainsi, f est une fonction homogène de degré d'homogénéité 0.

2) Comme f est homogène de degré d'homogénéité 0 et que f admet des dérivées partielles continues sur V d'ordre 1

Pour tout $(x_1, x_2) \in V$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \times f(x_1, x_2)$$
$$= 0$$

3) La fonction f est rationelle (quotient de 2 fonctions polynomiales). Elle admet donc des dérivées partielles sur V.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{(x_1+2x_2)\times(-4) - 1\times(5x_2-4x_1)}{(x_1+2x_2)^2}$$

$$= \frac{-13x_2}{(x_1+2x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{(x_1+2x_2)(5) - 2(5x_2-4x_1)}{(x_1+2x_2)^2}$$

$$= \frac{13x_1}{(x_1+2x_2)^2}$$

4) $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$

$$= x_1\left(-\frac{13x_2}{(x_1+2x_2)^2}\right) + x_2\left(\frac{13x_1}{(x_1+2x_2)^2}\right)$$

$$= -\frac{13x_1x_2}{(x_1+2x_2)^2} + \frac{13x_2x_1}{(x_1+2x_2)^2}$$

$$= \frac{-13x_1x_2+13x_2x_1}{(x_1+2x_2)^2} = 0$$