4) Application injective, surjective, bijective :

Définition (injection, surjection, bijection) Soit une application $f : X \to Y$
1) Si tout élément de Y a 0 ou 1 antécédent par f, on dit que f est injective
2) Si tout élément de Y a 1 ou plus d'antécédents par f, on dit que f est surjective
3) Si tout élément de Y a exactement 1 antécédent par f, on dit que f est bijective

Ainsi, f bijective équivaut à "f injective et f surjective"

Rappelons que si $y \in Y$, les antécédents de y par f sont les $x \in X$ tels que $f(x) = y$, c'est à dire les solutions de : $x \in X$ et $f(x) = y$

Ainsi, savoir si f est injective, surjective ou bijective revient à savoir compter pour tout $y \in Y$ le nombre de solutions des équations :

$$\boxed{x \in X \text{ et } f(x) = y}.$$

f est injective, si pour tout $y \in Y$, le nombre de solutions de $x \in X$ et $f(x) = y$ est inférieur ou égal à 1.
f est surjective, si pour tout $y \in Y$, le nombre de solutions de $x \in X$ et $f(x) = y$ est supérieur ou égal à 1.
f est bijective, si pour tout $y \in Y$, le nombre de solutions de $x \in X$ et $f(x) = y$ est égal à 1.

Définition (application inverse ou réciproque) Soit $f : X \to Y$ une application bijective. L'application :

$$Y \longrightarrow X \qquad y \longmapsto x \text{ l'antécédent de } y \text{ par } f$$

est appelée application inverse ou réciproque de f et notée f^{-1}.

Exercice type 1.1: Montrer que l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto f(x) = -3x + 7$$

est bijective et déterminer l'application inverse f^{-1}.

Solution : Soit y un réel (c.a.d. appartenant au but de l'application f), les antécédents x de y sont les solutions de l'équation :

$x \in \mathbb{R}$ et $y = -3x + 7$

ou encore $x \in \mathbb{R}$ et $-3x = y - 7$

ou encore $x \in \mathbb{R}$ et $x = -\frac{1}{3}y + \frac{7}{3}$.

Ainsi, tout y réel a un unique antécédent : $x = -\frac{1}{3}y + \frac{7}{3}$, par f.
L'application f est donc bijective et l'application inverse :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y \longmapsto f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}y + \frac{7}{3}.$$

<u>Exercice type 2.1:</u> On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \qquad x \longmapsto f(x) = \frac{x-1}{x-2}.$$

a) Montrer que l'application f est bien définie

b) Montrer que f est bijective et préciser avec soin l'application inverse.

<u>Solution</u> a) Pour monter que f est défini, il faut vérifier que pour tout x réel distinct de 2 (c.a.d x à la source de f), $\frac{x-1}{x-2}$ est un réel et que ce réel est distinct de 1 (c.a.d est dans le but de f :

Si $x \neq 2$, $x - 2$ est différent de 0 donc le quotient $\frac{x-1}{x-2}$ est un réel bien défini.

Si $x \neq 2$, il reste à montrer que $\frac{x-1}{x-2} \neq 1$. Sinon :

$\frac{x-1}{x-2} = 1$, soit $x-1 = x-2$, soit $-1 = -2$ Impossible

Ainsi, par un raisonnement dit par l'absurde, nous avons montré que si $x \neq 2$, $\frac{x-1}{x-2}$ est différent de 1.

b) Soit y un réel distinct de 1 (c.a.d. y appartenant au but de l'application f) les antécédents x de y sont les solutions de l'équation :

$$x \neq 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{x-1}{x-2}$$

ou encore $\quad x \neq 2$ et $(x-2)y = x-1$

ou encore $\quad x \neq 2$ et $xy - 2y = x - 1$

ou encore (en faisant passer les x à gauche) :

$$x \neq 2 \quad \text{et} \quad xy - x = 2y - 1$$

ou encore $\quad x \neq 2$ et $x(y-1) = 2y-1$

Comme $y \neq 1$ par hypothèse, nous obtenons $x = \frac{2y-1}{y-1}$. Il reste à voir que cette seule valeur de x obtenue est bien distincte de 2. Sinon $\frac{2y-1}{y-1} = 2$, soit $2y-1 = 2y-2$ et $-1 = -2$

Impossible !

Ainsi tout réel y distinct de 1 a un unique antécédent $x = \frac{2y-1}{y-1}$ par f. L'application f est donc bijective, d'inverse :

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \qquad y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{2y-1}{y-1}$$

<u>Exercice type 3.1:</u> On considère l'application :

$$h : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\} \qquad x \mapsto y = h(x) = 3 + \frac{6}{x+2} .$$

On admettra que h est bien définie. Montrer que h est bijective et préciser avec soin h^{-1}.

<u>Solution :</u> Soit $y \neq 3$ réel au but de l'application h. Les antécédents x de y par h sont les solutions de

$$(*) \quad \begin{cases} x \neq -2 \\ 3 + \dfrac{6}{x+2} = y \end{cases} .$$

$(*)$ est équivalent à $\quad x \neq -2$ et $\dfrac{6}{x+2} = y - 3$

soit $\quad x \neq -2$ et $6 = (y-3)(x+2)$

soit $\quad x \neq -2$ et $x + 2 = \dfrac{6}{y-3}$ puisque y est supposé distinct de 3

soit $x \neq -2$ et $x = -2 + \frac{6}{y-3}$.

Or $-2 + \frac{6}{y-3} \neq -2$, car sinon $-2 + \frac{6}{y-3} = -2$ et $\frac{6}{y-3} = 0$

soit $6 = 0$: impossible.

Donc $(*)$ a une unique solution $x = -2 + \frac{6}{y-3}$. Donc tout

$y \neq 3$ admet $x = -2 + \frac{6}{y-3}$ comme unique antécédent par h.

L'application h est donc bijective et l'application inverse h^{-1} est

$$h^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \qquad y \longmapsto h^{-1}(y) = -2 + \frac{6}{y-3}.$$

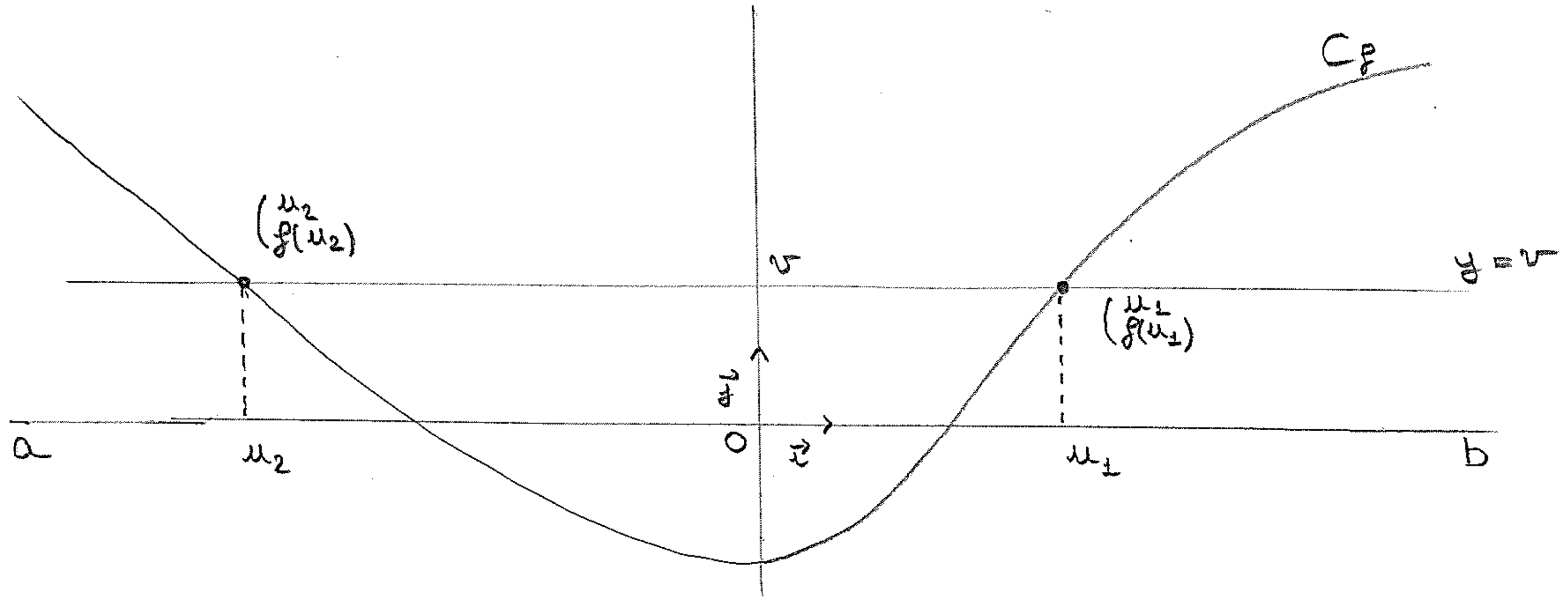
5) Rappels sur les applications numériques d'une variable réelle :

alphabet grec : α alpha β beta γ gamma λ lambda ε epsilon η eta μ mu θ têta ν nu ω omega ...

Soit $a < b$ deux réels (a pourra être $-\infty$ et b pourra être $+\infty$)

et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Soit $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note C_f la courbe représentative de f : $C_f \subset \mathcal{P}$ et un point M de coordonnées (x, y) appartient à C_f si et seulement si $y = f(x)$.



<u>Assertion</u> : Soit v réel, les antécédents de v par f sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite horizontale d'équation $y = v$.

<u>Théorème</u> : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable et que pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) > 0$ (respectivement $f'(c) < 0$). <u>Alors</u> :

1) f est strictement croissante (resp. décroissante)

2) L'ensemble des images par f des réels $]a, b[$ est l'intervalle $]\alpha, \beta[$ où $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to b} f(x)$ (respectivement $\alpha = \lim\limits_{x \to b} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to a} f(x)$).

3) L'application $]a,b[\to]\alpha,\beta[$, $x \mapsto f(x)$ est bijective. Son inverse $g :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est dérivable. Pour tout $x \in]\alpha,\beta[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} .$$

En appliquant par exemple ce théorème à la fonction $]0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ on obtient la proposition suivante :

<u>Proposition (Définition de la racine carrée)</u> Pour tout réel $y > 0$, il existe un unique réel $x > 0$ vérifiant $x^2 = y$. Ce réel noté $\sqrt{y}$ est appelé la racine carrée de y. De plus, la fonction

$$g :]0,\infty[\to]0,\infty[\quad x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$$

est dérivable et pour tout $x > 0$: $\quad g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

<u>Conséquences (équation $x^2 = a$)</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 = a$ a pour

- $a < 0$ aucune solution
- $a = 0$ une seule solution
- $a > 0$ deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

<u>Exercice type 4.1</u> Soit f l'application :

$$f :]-\infty, 1[\longrightarrow]2, \infty[\qquad x \mapsto f(x) = (x-1)^2 + 2$$

a) Vérifier que l'application f est bien définie

b) Montrer que f est bijective et préciser son inverse

<u>Solution :</u> a) Soit $x > 1$, $(x-1)^2$ est alors un réel strictement positif et $f(x) = (x-1)^2 + 2$ est donc strictement supérieur à 2. Ainsi $f(x) > 2$. L'application f est donc définie.

b) Soit $y > 2$ (c.a.d un réel au but de l'application f), cherchons les antécédents x de y par f. Ceux sont les solutions de :

$$x < 1 \quad \text{et} \quad y = (x-1)^2 + 2.$$

Soit $\quad x - 1 < 0 \quad$ et $\quad (x-1)^2 = y - 2$

Soit $\quad x - 1 = -\sqrt{y-2}$. Ainsi, $x = 1 - \sqrt{y-2}$.

Tout $y > 2$, admet donc $x = 1 - \sqrt{y+2}$ comme unique antécédent de y par f. L'application f est donc bijective. L'application inverse ou réciproque de f est :

$$f^{-1} :]2, \infty[\longrightarrow]-\infty, 1[\quad , \quad y \mapsto f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$$

Définition : Soit A et B deux ensembles. Une fonction $f : A \to B$ est un procédé qui associe à des éléments de A des éléments de B. Le domaine de définition de la fonction f, noté $\mathcal{D}_f$, est l'ensemble des éléments de A auxquel est associé par f un unique élément de B.
La fonction f donne naissance à l'application :

$$\mathcal{D}_f \longrightarrow B \quad , \quad x \longmapsto f(x)$$

Exemple La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = [1,2[\cup [2,\infty[= [1,\infty[- \{2\}$