IV 5 Fonction numérique à dérivées partielles continues

Proposition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U, alors f est continue

Proposition : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U. Alors pour tout $a = (a_1, .., a_n) \in U$, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, .., a_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, .., a_n) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, .., a_n) h_n + \varepsilon(h_1, .., h_n) \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$$

avec $\lim\limits_{(h_1, .., h_n) \to (0, .., 0)} \varepsilon(h_1, .., h_n) = 0$

Soit $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application numérique définie par

$$Df(a)(h_1,..,h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,..,a_n)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,..,a_n)\,h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1,..,a_n)\,h_n$$

Cette application $Df(a)$ est appelée la différentielle de f en a

<u>Resumé</u> : Pour $(h_1,..,h_n)$ petit

$$f(a_1+h_1,..,a_n+h_n) \cong f(a_1,..,a_n) + Df(a)(h_1,..,h_n)$$

Autrement dit $f(a_1,..,a_n) + Df(a)(h_1,..,h_n)$ est une bonne approximation de $f(a_1+h_1,..,a_n+h_n)$ pour $(h_1,..,h_n)$ petit

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$

1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$

2) Calculer $f(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$

3) Expliciter $Df(1,1)$

4) Comparer $f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right)$, $f(1,1)$, $f(1,1)+Df(1,1)\left(\frac{1}{400},\frac{1}{800}\right)$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 1$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 2x_2 + x_1 + 1$

2) $f(1,1) = 5$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 4$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 4$

3) $Df(1,1) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $(h_1, h_2) \mapsto Df(1,1)(h_1,h_2) = 4h_1 + 4h_2$

4) $f(1,1) = 5$

$$f(1,1) + Df(1,1)\left(\frac{1}{400}, \frac{1}{800}\right) = 5 + \frac{4}{400} + \frac{4}{800} = 5 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} = 5 + \frac{3}{200}$$

$$f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right) = \left(1+\frac{1}{400}\right) + \left(1+\frac{1}{800}\right) + \left(1+\frac{1}{400}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{800}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{400}\right)\left(1+\frac{1}{800}\right)$$

$$= 5 + \frac{4}{400} + \frac{4}{800} + \frac{1}{(400)^2} + \frac{1}{(800)^2} + \frac{1}{400 \times 800}$$

$$= 5 + \frac{3}{200} + \frac{1}{10.000} \times \frac{112}{1024}$$

Ainsi l'erreur commise en remplaçant $f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right)$ par $f(1,1)$ est de l'ordre de $\frac{3}{200}$, et en remplaçant $f\left(1+\frac{1}{400}, 1+\frac{1}{800}\right)$ par $f(1,1) + Df(1,1)\left(\frac{1}{400}, \frac{1}{800}\right)$ est de l'ordre de $\frac{1}{100.000}$.

IV 6 Problème d'extremum libre à 2 variables

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$. On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1. On a vu que si f admet un extremum local en (a_1, a_2), alors (a_1, a_2) est un point critique de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

Sans autre hypothèse, la réciproque est fausse. C'est à dire que si (a_1, a_2) est un point critique de f, la fonction f peut ne pas admettre d'extremum local en (a_1, a_2).

Proposition : $f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U.

1) Soit (a_1, a_2) un point critique de f : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0}$

Supposons de plus : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)\right)^2 > 0}$

Alors f admet en (a_1, a_2) un extremum local

a) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) > 0$, il s'agit d'un minimum local

b) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) < 0$, il s'agit d'un maximum local

2) Soit (a_1, a_2) un point critique de f : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) = 0}$

Supposons de plus : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)\right)^2 < 0}$

Alors f <u>n'admet pas en (a_1,a_2) un extremum local</u>

3) Soit (a_1, a_2) un point critique de f : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) = 0$

Supposons de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)\right)^2 = 0$

alors, des fois extremum local en (a_1,a_2), des fois non !

Dans cette proposition, si l'on note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2)$

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,a_2)$, on voit que la discussion se fait

sous l'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) = 0$ suivant le signe de

$tr - s^2$ et $r + t$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2) \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2)$$

(a_1,a_2) point critique de f : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)=0$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)=0$	$tr - s^2 > 0$	extremum local en (a_1,a_2)	
	$tr - s^2 > 0$	$r+t > 0$	minimum local en (a_1,a_2)
	$tr - s^2 > 0$	$r+t < 0$	maximum local en (a_1,a_2)
	$tr - s^2 < 0$	pas d'extremum local en (a_1,a_2)	
	$tr - s^2 = 0$	?	

<u>Exercice type :</u> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3$

1) Pourquoi f admet-elle des dérivées partielles de tout ordre continues sur $\mathbb{R}^2$

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ $\qquad$ 3) Montrer que f a un unique point critique

4) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$

5) Que peut-on dire de f au voisinage de son point critique ?

1) La fonction f est polynomiale, donc admet des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbb{R}^2$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 2$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 + 1$

3) Les points critiques de f sont les couples (x_1,x_2) solution de

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système de 2 équations linéaires à 2 inconnues par substitution. La première équation donne

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2+2) = -\frac{1}{2}x_2 - 1 .$$

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient :

$$-\frac{1}{2}x_2 - 1 + 2x_2 + 1 = 0 \quad , \quad \frac{3}{2}x_2 = 0 \quad , \text{ soit } \quad x_2 = 0 .$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient :

$$2x_1 + 0 + 2 = 0 , \quad 2x_1 = -2 \quad , \text{ soit } \quad x_1 = -1 .$$

Le couple de réel $(-1,0)$ est le seul point critique de f

4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 1$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 2$.

On constate bien, suivant l'identité de Schwartz, que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$.

5) Le point $(-1,0)$ est un point critique (le seul point critique de f). Posons alors :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,0) = 2 \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(-1,0) = 1 \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,0) = 2 .$$

On constate $rt - s^2 = 2 \times 2 - (1)^2 = 3 > 0$. Donc f admet en $(-1,0)$ un extremum local.

Comme $r + t = 2 + 2 = 4 > 0$, f admet en $(-1,0)$ un minimum local.

IV.7 Problème d'extremum avec contrainte

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit $H \subset \mathbb{R}^n$. On rappelle que la restriction de f à H est la fonction numérique, notée $f_{|H}$:

$$f_{|H} : H \to \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \mapsto f_{|H}(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n)$$

Nous allons nous intéresser sous certaines conditions aux points de H où la restriction de f à H admet un extremum local. On peut appeler cela un problème d'extremum avec contrainte. La contrainte est "appartenir à H".

Par exemple : $(a_1, .., a_n) \in H$ est un maximum local de la restriction de f à H si pour tout $(x_1, .., x_n) \in H$ et proche de $(a_1, .., a_n)$

$$f(x_1, .., x_n) \leqslant f(a_1, .., a_n).$$

Proposition (pb d'extremum avec contrainte, 2 variables)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$

$g : U \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2)$. On suppose que f et g admettent des dérivées partielles continues sur U. Soit $k \in \mathbb{R}$, posons

$$H = \{(x_1, x_2) \in H \text{ tels que } g(x_1, x_2) = k\}.$$

Si (a_1, a_2) est un extremum local de la restriction de f à H, alors les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

1) $(a_1, a_2) \in H$ et $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0$,

2) Soit il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que (a_1, a_2, λ_0) soit un point critique de la fonction :

$$h : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, \lambda) \longmapsto h(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\,(g(x_1, x_2) - k)$$

Soit (a_1, a_2) est un point critique de g.

Exercice : Soit $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$

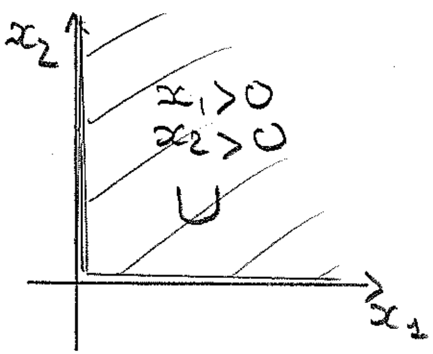
1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et dessiner U.

2) Soit $f : U \to \mathbb{R}$, la fonction numérique définie par $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f

3) Soit $g : U \to \mathbb{R}$, la fonction numérique définie par $g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$
Posons $H = \{(x_1, x_2) \in U$ tels que $g(x_1, x_2) = 1\}$. Dessiner H

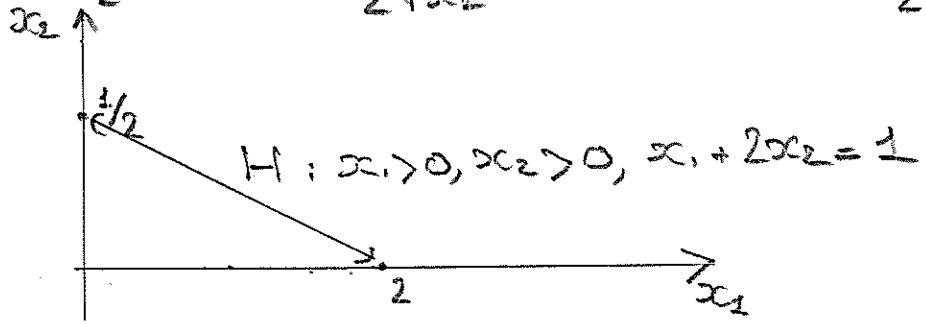
4) On suppose que la restriction de f à H a un maximum en (a_1, a_2)
Déterminer (a_1, a_2).

Solution : 1) $U = U_1 \cap U_2$ où
$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0\}$, $U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_2 > 0\}$.
U_1 et U_2 sont définis par des inégalités polynomiales strictes, ceux sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble U intersection de deux ouverts est donc un ouvert.



2) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}$

3)



Les points de H sont les points strictement dans le premier quadrant : $x_1>0$, $x_2>0$ et sur la droite d'équation $x_1+2x_2=1$.

4) Donnons, suivant la proposition du cours, deux méthodes :

<u>Méthode 1 :</u> D'après la proposition sur les extremum avec contrainte à deux variables, $(a_1,a_2)\in H$ et $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\,\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\,\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2)=0$.

Comme $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)=1$ $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)=2$. Le couple de réels (a_1,a_2) vérifie :

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_1>0,\ a_2>0, & \dfrac{1}{2\sqrt{a_1}}\times 2-\dfrac{1}{2\sqrt{a_2}}\times 1=0 \\ a_1+2a_2=1 & \end{array}}$$

Il vient :
$$\begin{cases} a_1+2a_2=1 & a_1>0 \quad a_2>0 \\ 2\sqrt{a_2}=\sqrt{a_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+2a_2=1 & a_1>0 \quad a_2>0 \\ 4a_2=a_1 \end{cases}$$

D'où $6a_2=1$, soit $a_2=\frac{1}{6}$ et $a_1=4a_2=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

Ainsi $(a_1,a_2)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$.

On remarque que g n'admet pas de points critiques.

méthode 2 : Par la proposition, sur les extremum avec contrainte à deux variables, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que (a_1, a_2, λ_0) soit un point critique de $h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2, \lambda) \mapsto h(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1)$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda \ , \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + 2\lambda, \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - 1 .$$

Ainsi (a_1, a_2, λ_0) est solution du système :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \ , \ a_2 > 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a_1}} + \lambda_0 = 0 \ , \quad \dfrac{1}{2\sqrt{a_2}} + 2\lambda_0 = 0 \ , \quad a_1 + 2a_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il vient : $1 = -2\lambda_0\sqrt{a_1}$ et $1 = -4\lambda_0\sqrt{a_2}$.

Donc : $1 = 4\lambda_0^2 a_1$, $1 = 16\lambda_0^2 a_2$. Donc, $a_1 = \dfrac{1}{4\lambda_0^2}$, $a_2 = \dfrac{1}{16\lambda_0^2}$.

D'où $$\frac{1}{4\lambda_0^2} + 2\left(\frac{1}{16\lambda_0^2}\right) = 1 = \frac{1}{4\lambda_0^2} + \frac{1}{8\lambda_0^2} = \frac{3}{8\lambda_0^2} .$$ Ainsi $\lambda_0^2 = \dfrac{3}{8}$.

$$a_1 = \frac{1}{4\lambda_0^2} = \frac{2}{3} \qquad a_2 = \frac{1}{16\lambda_0^2} = \frac{1}{6}$$

Donc $(a_1, a_2) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$.

<u>Proposition (extremum avec contrainte)</u> : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n) \qquad g : U \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, .., x_n) \mapsto g(x_1, .., x_n)$

On suppose que f et g admettent des dérivées partielles continues. Soit $k \in \mathbb{R}$, posons $H = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in U$ tels que $g(x_1, .., x_n) = k\}$.

Si $(a_1, a_2, .., a_n) \in U$ est un extremum de la restriction de f à H (ou encore extremum de f sous la contrainte $g(x_1, .., x_n) = k$), alors :

- soit $(a_1, a_2, .., a_n)$ est un point critique de g,
- soit, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tel que $(a_1, a_2, .., a_n, \lambda_0)$ est un point critique de $h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) \mapsto h(x_1, .., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, .., x_n) + \lambda (g(x_1, x_2, .., x_n) - k).$$

<u>Remarque</u> : On peut noter que

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, .., x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, .., x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, .., x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}(x_1, .., x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, .., x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, .., x_n)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, .., x_n, \lambda) = g(x_1, x_2, .., x_n) - k$$

Ainsi, dire que $(a_1, a_2, .., a_n, \lambda_0)$ est point critique équivaut à demander que $(a_1, a_2, .., \lambda_0)$ soit solution du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, .., a_n) + \lambda_0 \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, .., a_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, .., a_n) + \lambda_0 \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(a_1, a_2, .., a_n) = 0 \\ g(a_1, a_2, .., a_n) - k = 0 \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U \end{cases}$$

IV . 8 Complément : Dérivée partielle d'une fonction composée

Soit $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (y_1, y_2, .., y_p) \longmapsto g(y_1, y_2, .., y_p)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f_1, .., f_p$ p fonctions numériques définies sur U :

$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, .., x_n) \longmapsto f_1(x_1, .., x_n)$$
$$f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, .., x_n) \longmapsto f_2(x_2, .., x_n)$$

$$f_p : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_p(x_1, x_2, .., x_n)$$

On note h la fonction composée :

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \longmapsto h(x_1, .., x_n) = g(f_1(x_1, .., x_n), f_2(x_1, .., x_n), .., f_p(x_1, \dots x_n))$$

<u>Proposition</u> : Avec ces notations, si $g, f_1, .., f_p$ admettent des dérivées partielles continues, h admet des dérivées partielles et pour $i \in \{1, 2, .., n\}$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, .., x_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)\, \frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(x_1, .., x_n), .., f_p(x_1, .., x_n)) + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)\, \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(x_1, .., x_n), .., f_p(x_1, .., x_n))$$
$$+ \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)\, \frac{\partial g}{\partial y_p}(f_1(x_1, .., x_n), .., f_p(x_1, .., x_n))$$

Exemple : $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (y_1, y_2, y_3) \mapsto g(y_1, y_2, y_3)$

On suppose que g admet des dérivées partielles continues, calculer à l'aide des dérivées partielles de g les dérivées partielles de la fonction

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = g(x_1^2 + x_2^2 \,,\, x_1 x_2 \,,\, x_1^2 - x_2^2).$$

La proposition précédente avec $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ et $f_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \frac{\partial g}{\partial y_1}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2) + x_2 \frac{\partial g}{\partial y_2}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2) + 2x_1 \frac{\partial g}{\partial y_3}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2) + x_1 \frac{\partial g}{\partial y_2}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2) - 2x_2 \frac{\partial g}{\partial y_3}(x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2, x_1^2 - x_2^2)$$