A) Montrer que l'application :

$$h : \mathbf{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = \frac{x+4}{3x-6}$$

est bijective. Déterminer la fonction réciproque h^{-1}. En déduire les antécédents de $\frac{1}{6}$.
B) Montrer que l'application :

$$g \ :]-\infty, 2[\longrightarrow]17, \infty[\quad , \quad x \mapsto g(x) = 17 + (x-2)^2 \ .$$

est bijective. Déterminer l'application réciproque g^{-1}. En déduire les antécédents de 18.

Solution de A : Pour montrer que h est bijective, il faut montrer que pour tout $y \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$, il existe un unique $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ tel que $h(x) = y$. Soit $y \neq \frac{1}{3}$. L'équation $h(x) = y$ équivaut respectivement à :

$$\frac{x+4}{3x-6} = y \ ,$$
$$x + 4 = (3x-6)y \ ,$$
$$x + 4 = 3xy - 6y \ ,$$
$$x - 3xy = -6y - 4 \ ,$$
$$x(1-3y) = -6y - 4 \ .$$

Comme $y \neq \frac{1}{3}$, nous obtenons :

$$x = \frac{-6y-4}{1-3y} = \frac{6y+4}{3y-1} \ .$$

Ce nombre est toujours dictinct de 2. Ainsi, pour tout $y \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$, il existe un unique $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ tels que $h(x) = y$. L'application h est donc bijective.

L'application inverse de h est notée h^{-1}. Son ensemble source est $\mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$ l'ensemble but de h. Son ensemble but est $\mathbf{R} - \{2\}$ l'ensemble source de h. Par définition, l'image de $y \in \mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\}$ par h^{-1} est l'unique antécédent de y par h. Nous avons donc :

$$h^{-1}(y) = \frac{6y+4}{3y-1} \ .$$

Ainsi, l'application inverse de h est :

$$h^{-1} : \mathbf{R} - \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{2\} \quad , \quad y \longmapsto h^{-1}(y) = \frac{6y+4}{3y-1} \ .$$

Comme h est bijective, $\frac{1}{6}$ a un unique antécédent par h qui est :

$$h^{-1}(\frac{1}{6}) = \frac{6\frac{1}{6}+4}{3\frac{1}{6}-1} = \frac{1+4}{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{-\frac{1}{2}} = -10 \ .$$

Solution de B : Pour montrer que g est bijective, il faut montrer que pour tout $y \in]17, \infty[$, il existe un unique $x \in]-\infty, 2[$ tel que $g(x) = y$. Soit donc, $y \in]17, \infty[$. L'équation $g(x) = y$ équivaut respectivement à :

$$17 + (x-2)^2 = y \ ,$$

$$(x-2)^2 = y - 17 \ ,$$

$$x - 2 = \sqrt{y-17} \quad \text{ou} \quad x - 2 = -\sqrt{y-17} \ ,$$

$$x = 2 + \sqrt{y-17} \quad \text{ou} \quad x = 2 - \sqrt{y-17} \ ,$$

Seule la solution $x = 2 - \sqrt{y-17}$ est dans l'intervalle $]-\infty, 2[$. Ainsi, pour tout $y \in]17, \infty[$, il existe un unique $x \in]-\infty, 2[$ tel que $g(x) = y$:

$$x = 2 - \sqrt{y-17} \ .$$

L'application g est donc bijective. L'application inverse de g est :

$$g^{-1} \ :]17, \infty[\longrightarrow]-\infty, 2[\quad , \quad y \longmapsto g^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-17} \ .$$

Comme g est bijective, 18 a un unique antécédent par g qui est :

$$g^{-1}(18) = 2 - \sqrt{18-17} = 1 \ .$$

Nota Bene : Cet exercice illustre quelques notions sur les applications entre ensembles abordées en cours. Rappelons ces notions. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre deux ensembles X et Y. Si $y \in Y$, nous appelons antécédent de y par f tout x dans X tel que $f(x) = y$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite bijective si tout $y \in Y$ admet un unique antécédent par f. Si f est une application bijective, l 'application notée f^{-1} :

$$f^{-1} \ : \ Y \longrightarrow X \quad y \longmapsto f^{-1}(y) = \ \text{"l'antécédent" de } y \text{ par } f$$

est appelée inverse ou réciproque de f