C) Montrer que l'application :

$$h : \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{3\} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = \frac{6x+4}{2x+1}$$

est bijective. Déterminer la fonction réciproque h^{-1}. En déduire les antécédents de $\frac{1}{2}$.
D) Montrer que l'application :

$$g \ :]-\infty, 3[\longrightarrow]-4, \infty[\quad , \quad x \mapsto g(x) = -4 + (x-3)^2 \ .$$

est bijective. Déterminer l'application réciproque g^{-1}. En déduire les antécédents de 12.

Solution de C : Pour montrer que h est bijective, il faut montrer que pour tout $y \in \mathbf{R} - \{3\}$, il existe un unique $x \in \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ tel que $h(x) = y$. Soit $y \neq 3$. L'équation $h(x) = y$ équivaut respectivement à :

$$\frac{6x+4}{2x+1} = y \ ,$$
$$6x + 4 = (2x+1)y \ ,$$
$$6x + 4 = 2xy + y \ ,$$
$$6x - 2xy = y - 4 \ ,$$
$$x(6-2y) = y - 4 \ .$$

Comme $y \neq 3$, nous obtenons :

$$x = \frac{y-4}{6-2y} \ .$$

Ce nombre est toujours dictinct de $-\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbf{R} - \{3\}$, il existe un unique $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ tels que $h(x) = y$. L'application h est donc bijective.

L'application inverse de h est notée h^{-1}. Son ensemble source est $\mathbf{R} - \{3\}$ l'ensemble but de h. Son ensemble but est $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ l'ensemble source de h. Par définition, l'image de $y \in \mathbf{R} - \{3\}$ par h^{-1} est l'unique antécédent de y par h. Nous avons donc :

$$h^{-1}(y) = \frac{y-4}{6-2y} \ .$$

Ainsi, l'application inverse de h est :

$$h^{-1} : \mathbf{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\} \quad , \quad y \longmapsto h^{-1}(y) = \frac{y-4}{6-2y} \ .$$

Comme h est bijective, $\frac{1}{2}$ a un unique antécédent par h qui est :

$$h^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} - 4}{6 - 2\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{6-1} = \frac{-\frac{7}{2}}{5} = -\frac{7}{10} \ .$$

Solution de D : Pour montrer que g est bijective, il faut montrer que pour tout $y \in]-4, \infty[$, il existe un unique $x \in]-\infty, 3[$ tel que $g(x) = y$. Soit donc, $y \in]-4, \infty[$. L'équation $g(x) = y$ équivaut respectivement à :

$$-4 + (x-3)^2 = y \ ,$$

$$(x-3)^2 = y + 4 \ ,$$

$$x - 3 = \sqrt{y+4} \quad \text{ou} \quad x - 3 = -\sqrt{y+4} \ ,$$

$$x = 3 + \sqrt{y+4} \quad \text{ou} \quad x = 3 - \sqrt{y+4} \ ,$$

Seule la solution $x = 3 - \sqrt{y+4}$ est dans l'intervalle $]-\infty, 3[$. Ainsi, pour tout $y \in]-4, \infty[$, il existe un unique $x \in]-\infty, 3[$ tel que $g(x) = y$:

$$x = 3 - \sqrt{y+4} \ .$$

L'application g est donc bijective. L'application inverse de g est :

$$g^{-1} \ :]4, \infty[\longrightarrow]-\infty, 3[\quad , \quad y \longmapsto g^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y+4} \ .$$

Comme g est bijective, 12 a un unique antécédent par g qui est :

$$g^{-1}(18) = 3 - \sqrt{12+4} = 3 - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1 \ .$$

Nota Bene : Cet exercice illustre quelques notions sur les applications entre ensembles abordées en cours. Rappelons ces notions. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application entre deux ensembles X et Y. Si $y \in Y$, nous appelons antécédent de y par f tout x dans X tel que $f(x) = y$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite bijective si tout $y \in Y$ admet un unique antécédent par f. Si f est une application bijective, l 'application notée f^{-1} :

$$f^{-1} \ : \ Y \longrightarrow X \quad y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{ "l'antécédent" de } y \text{ par } f$$

est appelée inverse ou réciproque de f