a) Donner la représentation graphique de $D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $3x_1 - 2x_2 = 12\}$. Puis de $H_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $3x_1 - 2x_2 \leq 12\}$
b) Donner la représentation graphique de $D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $4x_2 - x_1 = 0\}$. Puis de $H_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $4x_2 - x_1 \leq 0\}$
c)Donner la représentation graphique de $D_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_2 = -1\}$.
Donner la représentation graphique de $H_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x_2 \geq -1\}$
d) Donner enfin la représentation graphique de :

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 \geq -1\ ,\ \ 4x_2 - x_1 \leq 0 \text{ et } 3\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 \leq 12\}\ .$$

e) Justifier que K est borné, non ouvert et fermé.

---

a) La représentation graphique de D_1 est une droite. L'équation $3x_1 - 2x_2 = 12$ donne pour $x_1 = 0$ le réel $x_2 = -6$ et pour $x_2 = 0$ le réel $x_1 = 4$. Ainsi, D_1 est la droite qui joint le point A_1 de coordonnées $(4, 0)$ et le point A_2 de coordonnées $(0, -6)$. La représentation graphique de H_1 est un demi-plan délimité par le droite d'équation $3x_1 - 2x_2 = 12$ qui n'est autre que la droite D_1. Le demi-plan H_1 est défini par une inégalité large ($\leq$). La droite D_1 est donc contenue dans H_1. De plus $3.0 - 2.0 = 0 \leq 12$. Le point de coordonnées $(0, 0)$ est donc dans H_1.

b) La représentation graphique de D_2 est une droite. Cette droite passe par l'origine puisque $4.0 - 0 = 0$. Elle passe aussi par le point B_2 de coordonnées $(4, 1)$, puisque $4.1 - 4 = 0$. Ainsi, D_2 est la droite qui joint l'origine au point B_2 de coordonnées $(4, 1)$. La représentation graphique de H_2 est un demi-plan délimité par le droite d'équation $4x_2 - x_1 = 0$ qui n'est autre que la droite D_2. Le demi-plan H_2 est défini par une inégalité large ($\leq$). La droite D_2 est donc contenue dans H_2. De plus $4.0 - 1 = -1 \leq 0$. Le point de coordonnées $(1, 0)$ est donc dans H_2.

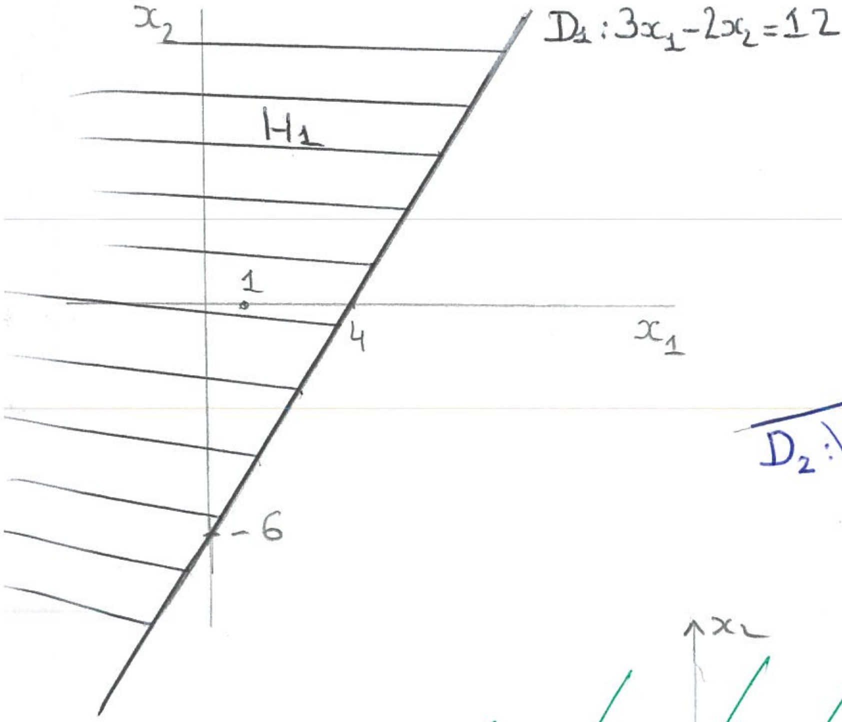
Plus généralement, si (a, b) sont deux réels non tous nuls, la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = 0$ passe toujours par l'origine et le point de coordonnées $(-b, a)$.

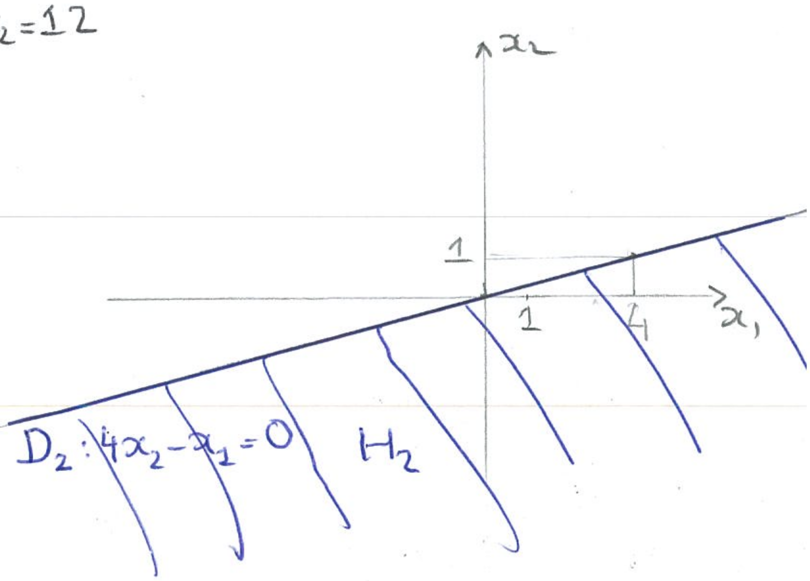
c) La représentation graphique de D_3 est une droite. Un point M est sur D_3 si seulement si sa deuxième coordonnée est égale à -1. La droite D_3 est donc la paralèlle à l'axe des x_1 qui passe par le point B_3 de coordonnées $(0, -1)$. Le demi-plan H_3 est défini par une inégalité large ($\geq$). La droite D_3 est donc contenue dans H_3. De plus $0 \geq -1$. Le point de coordonnées $(0, 0)$ est donc dans H_3.

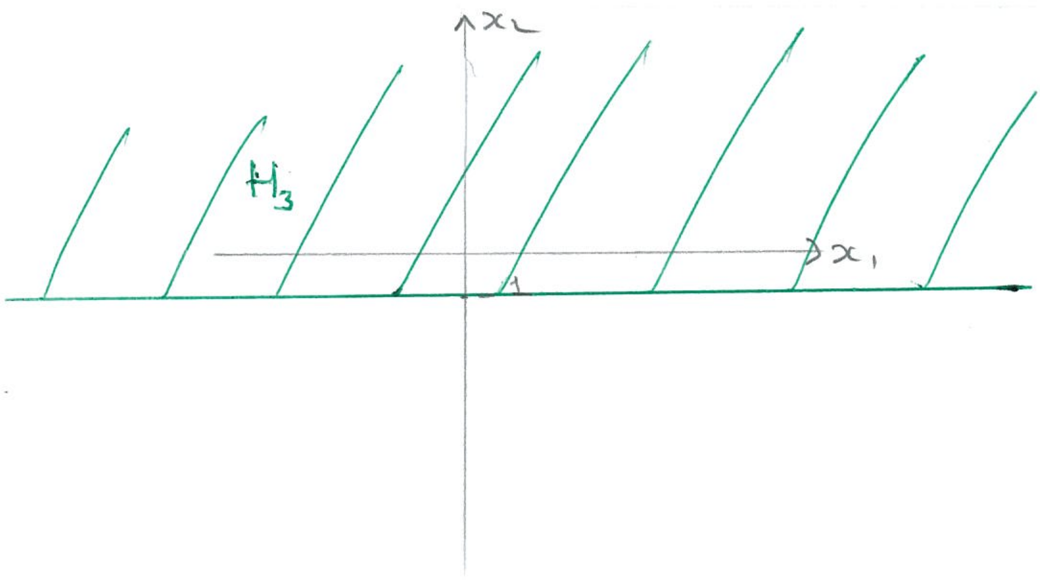
d) L'ensemble K est par définition l'intersection des ensembles H_1, H_2 et H_3. Les points M de coordonnées $(x_1, x_2) \in K$ sont donc les points appartenant à la représentation graphique de H_1, H_2 et H_3. Nous obtenons que la repésentation graphique de K est l'intérieur d'un triangle avec ses cotés. Le lecteur pourra montrer que ce triangle est plus précisement le triangle qui joint les points de coordonnées :

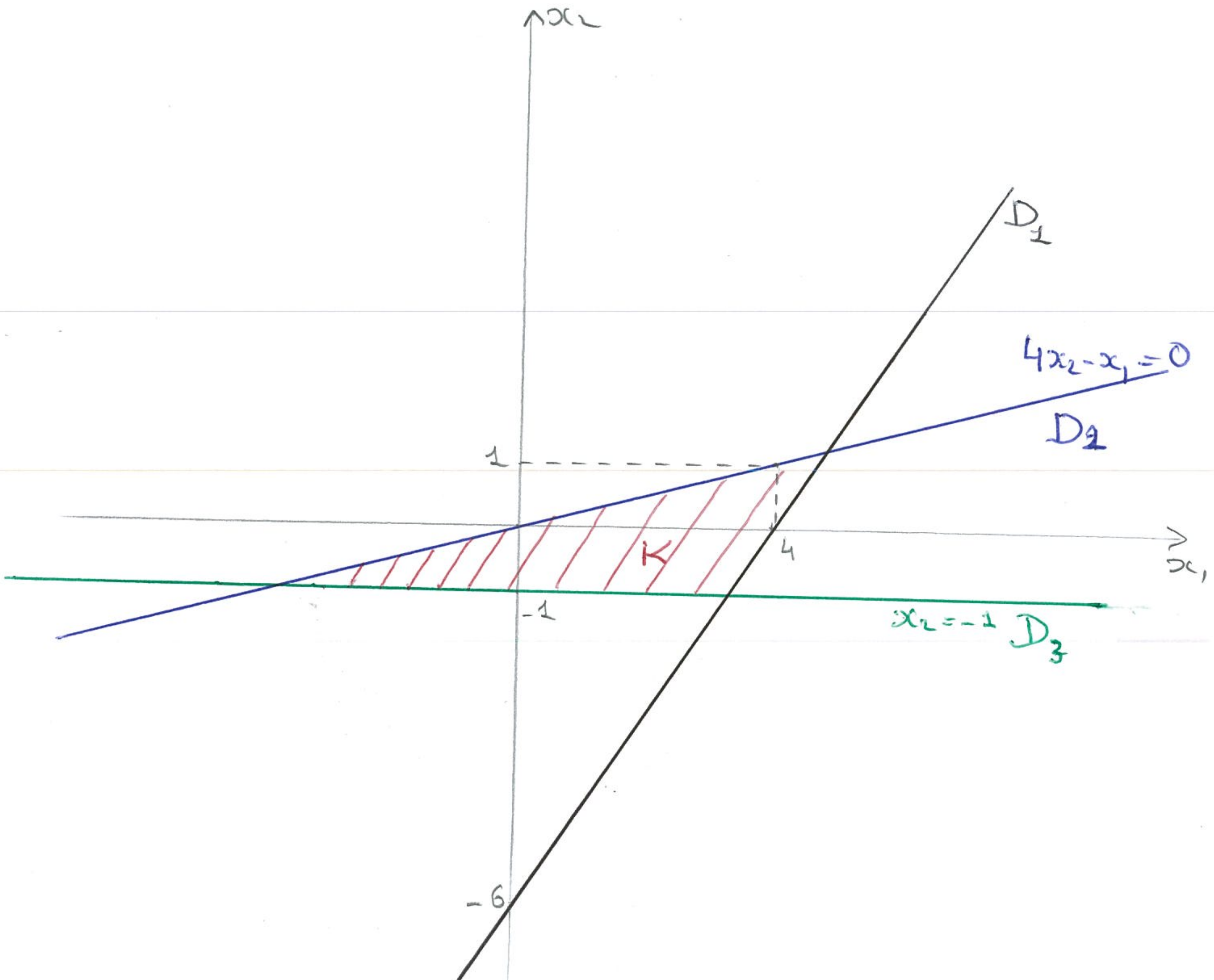
$$(-4, -1)\quad ,\quad (\frac{10}{3}, -1)\quad \text{et}\quad (\frac{24}{5}, \frac{6}{5})\ .$$

e) L'ensemble K est contenu dans un disque de centre l'origine et de rayon 10 par exemple. L'ensemble K est donc borné. L'ensemble K n'est pas ouvert, car tout disque centré en un point du bord de K contient des points qui ne sont pas dans K. Enfin, K est par définition l'intersection des ensembles H_1, H_2 et H_3 : $K = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. L'ensemble H_1 est défini par une fonction polynomiale $((x_1, x_2) \mapsto 3x_1 - 2x_2)$ donc continue et par une inégalité large ≤ 12. C'est donc un ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble H_2 est défini par une fonction polynomiale $((x_1, x_2) \mapsto 4x_2 - x_1)$ donc continue et par une inégalité large ≤ 0. C'est donc un ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble H_3 est défini par une fonction polynomiale donc continue $((x_1, x_2) \mapsto -x_2)$ et une inégalité large ≥ -1. C'est donc un ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$. K est donc fermé comme intersection de fermé.









x_2
D_1
$4x_2 - x_1 = 0$
D_2
1
x_1
4
K
-1
$x_2 = -1$
D_3
-6
$3x_1 - 2x_2 = 12$