1) Nous considérons, l'application :

$$f \ : \ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \ : \ f(x_1,x_2) = -\frac{1}{4}x_1^2x_2 + 2x_1x_2^3 - \frac{5}{3}x_1^3x_2 + 7x_2 - 2 \ .$$

Calculer les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$. Puis calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ par rapport à x_1. Puis, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}$ la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ par rapport à x_2. Puis, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ par rapport à x_2. Et, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}$ la dérivée partielle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ par rapport à x_1.

2) Considérons $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $3x_1 - 4x_2 \neq 0\}$. Représenter U et montrer que U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$. Nous considérons l'application $h : \ U \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(x_1,x_2) = \dfrac{-4x_1+2x_2}{3x_1-4x_2}$. Calculer : $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x_2}$ et $x_1\dfrac{\partial h}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial h}{\partial x_2}$.

Soit enfin : l'application : $g : \ U \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $g(x_1,x_2) = \dfrac{-x_1}{(3x_1-4x_2)^2}$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$.

Solution de 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4}(2x_1)x_2 + 2x_2^3 - \frac{5}{3}(3x_1^2)x_2 \\
&= -\frac{1}{2}x_1x_2 + 2x_2^3 - 5x_1^2x_2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4}x_1^2 + 2x_1(3x_2^2) - \frac{5}{3}x_1^3 + 7 \\
&= -\frac{1}{4}x_1^2 + 6x_1x_2^2 - \frac{5}{3}x_1^3 + 7 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{2}x_2 - 5(2x_1)x_2 \\
&= -\frac{1}{2}x_2 - 10x_1x_2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{2}x_1 + 2(3x_2^2) - 5x_1^2 \\
&= -\frac{1}{2}x_1 + 6x_2^2 - 5x_1^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4}(2x_1) + 6x_2^2 - \frac{5}{3}(3x_1^2) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 + 6x_2^2 - 5x_1^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) &= 6x_1(2x_2) \\
&= 12x_1x_2 \ .
\end{aligned}$$

Solution de 2 :

U se représente comme le complémentaire de la droite D d'equation $3x_1 - 4x_2 = 0$. La droite D passe par les points de coordonnées $(0,0)$ et $(4,3)$. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer le dessin. U est défini par une inégalité ($\neq 0$) et une fonction polynomiale donc continue ($(x_1, x_2) \mapsto 3x_1 - 4x_2$). Il en résulte que U est sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(3x_1 - 4x_2)(-4) - (3)(-4x_1 + 2x_2)}{(3x_1 - 4x_2)^2} = \frac{-12x_1 + 16x_2 + 12x_1 - 6x_2}{(3x_1 - 4x_2)^2} = \frac{10x_2}{(3x_1 - 4x_2)^2}.$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(3x_1 - 4x_2)(2) - (-4)(-4x_1 + 2x_2)}{(3x_1 - 4x_2)^2} = \frac{6x_1 - 8x_2 - 16x_1 + 8x_2}{(3x_1 - 4x_2)^2} = \frac{-10x_1}{(3x_1 - 4x_2)^2}.$$

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \frac{10x_2}{(3x_1 - 4x_2)^2} + x_2 \frac{-10x_1}{(3x_1 - 4x_2)^2} = \frac{10x_1x_2 - 10x_1x_2}{(3x_1 - 4x_2)^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{(3x_1 - 4x_2)^2(-1) - 2(3)(3x_1 - 4x_2)(-x_1)}{(3x_1 - 4x_2)^4} = \frac{(3x_1 - 4x_2)(-1) - 2(3)(-x_1)}{(3x_1 - 4x_2)^3} \\ &= \frac{-3x_1 + 4x_2 + 6x_1}{(3x_1 - 4x_2)^3} = \frac{3x_1 + 4x_2}{(3x_1 - 4x_2)^3} \end{aligned}$$