On considère la fonction

$$\begin{cases} f \ : & \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1 + 6x_2 + 17. \end{cases}$$

1. Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2. Montrer que f a un unique point critique. En ce point critique, la fonction f admet-elle un extremum local ? Dans ce cas, s'agit il d'un maximum local ou d'un minimum local ?
3. Representer le sous-ensemble K de $\mathbf{R}^2$:

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \leq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \text{ et } -2x_1 + x_2 \leq 2\} \ .$$

   Justifier que K est un fermé borné de $\mathbf{R}^2$.
4. Pourquoi la restriction de f à K admet elle un maximum en un point de K ? Ce maximum peut-il être atteint en un point de

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 < 0 \ , \ x_2 > 0 \text{ et } -2x_1 + x_2 < 2\} \ .$$

Solution de 1 : L'application f est polynomiale de deux variables. C'est donc une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. Elle admet de plus des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbf{R}^2$. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 4x_1 - 2x_2 - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_1 + 6x_2 + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = -2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 6 \ .$$

Solution de 2 : Les points critiques de f sont les couples de réels (x_1, x_2) où les deux dérivées partielles d'ordre un de f sont nulles. Ceux sont donc les solutions dans $\mathbf{R}^2$ du système :

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5 = 0 & E_1 \\ -2x_1 + 6x_2 + 6 = 0 & E_2 \end{cases} .$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5 = 0 & E_1 \\ -4x_1 + 12x_2 + 12 = 0 & 2E_2 \end{cases} .$$

Ainsi par addition : $10x_2 + 7 = 0$ et $x_2 = -\frac{7}{10}$. Reportons cette valeur dans E_1, nous obtenons successivement :

$$4x_1 - 2(-\frac{7}{10}) - 5 = 0 \quad , \quad 4x_1 + \frac{7}{5} - 5 = 0 \quad , \quad 4x_1 + \frac{7}{5} - \frac{25}{5} = 0 \ ,$$

$$4x_1 - \frac{18}{5} = 0 \quad , \quad 4x_1 = \frac{18}{5} \quad , \quad x_1 = \frac{18}{5 \times 4} = \frac{9}{10} \, .$$

Ainsi, si f a un point critique ce point est le couple de réel $(a, b) = (\frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$. Nous vérifions que ce couple convient bien et f admet donc comme unique point critique $(a, b) = (\frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$. Notre problème est un problème d'extremum libre à deux variables. Comme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a, b)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a, b) - (\frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b))^2 = 6 \times 4 - (-2)^2 = 24 - 4 = 20 > 0 \, ,$$

l'application f admet un extremum local au point critique (a, b). Comme de plus :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a, b) = 4 + 6 = 10 > 0 \, ,$$

l'application f admet un minimum local au point critique (a, b).

Solution de 3 : Le sous-ensemble K de $\mathbf{R}^2$ est obtenu comme intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \leq 0\} \, , \\ K_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 \geq 0\} \, , \\ K_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } -2x_1 + x_2 \leq 2\} \quad . \end{aligned}$$

L'ensemble K_1 se représente par le demi-plan H_1 délimité par la droite d'équation $x_1 = 0$ et contenant le point $(-1, 0)$. L'ensemble K_2 se représente par le demi-plan H_2 délimité par la droite d'équation $x_2 = 0$ et contenant le point $(0, 1)$. L'ensemble K_3 se représente par un demi-plan délimité H_3 par la droite D d'équation $-2x_1 + x_2 = 2$. Le point A de coordonnées $(0, x_2)$ appartient à D si $x_2 = 2$ et le point B de coordonnées $(x_1, 0)$ appartient à D si $-2x_1 = 2$, soit $x_1 = -1$. Ainsi, les points A de coordonnées $(0, 2)$ et B de coordonnées $(-1, 0)$ appartiennent à D. D'autre part $-2 \times 0 + 0 \leq 2$ et H_3 contient donc l'origine de coordonnées $(0, 0)$. K_3 se représente comme le demi-plan H_3 s'appuyant sur D qui contient l'origine. Ces trois demi-plans contiennent leurs droites d'appui, puisque les inégalités qui les définissent $(\leq, \geq, \leq)$ sont larges. La représention de K est donc le triangle T avec son bord obtenu en prenant l'intersection des trois demi-plans H_1, H_2 et H_3. Voir le dessin, ci dessous.

Les sous-ensembles K_1, K_2 et K_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités larges ≤ 0, ≥ 0 et ≤ 2. Ceux sont des fermés de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble K est donc fermé comme intersection de trois fermés. De plus K est borné, car compris par exemple dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.

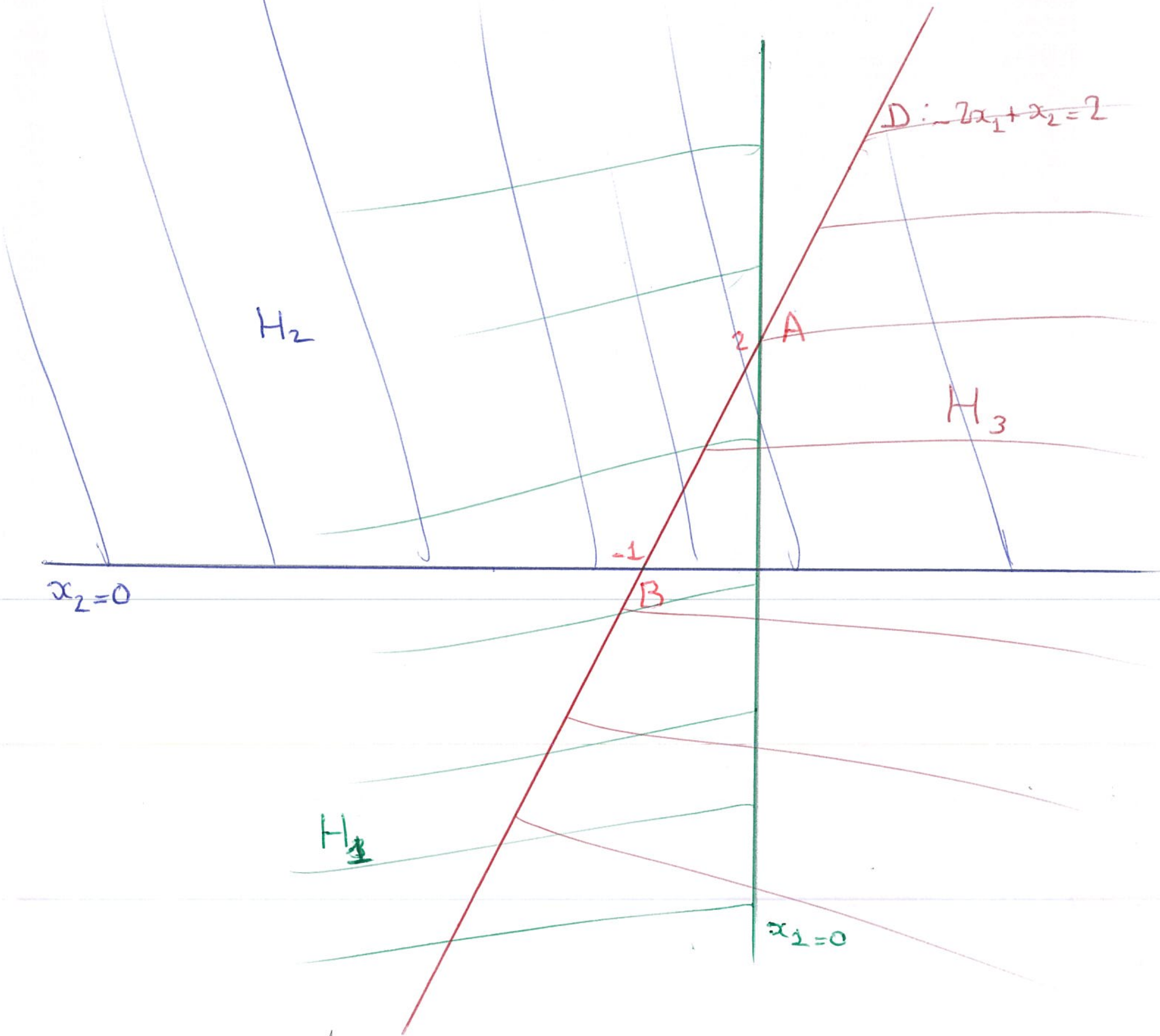
Solution de 4 : La fonction polynomiale f est continue, sa restriction à K est donc également continue. L'ensemble K est fermé borné. La restriction de f à K est donc une fonction numérique sur un fermé borné. Il existe dons des points de K où la restriction à K est maximum (respectivement minimum).

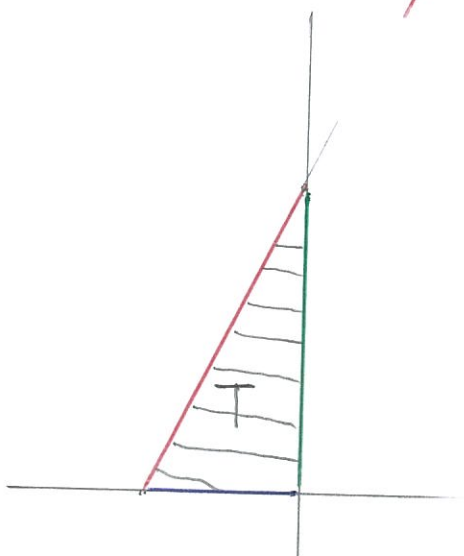
Le sous-ensemble U est inclus dans K. C'est l'intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \leq 0\} \;, \\ U_2 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 \geq 0\} \;, \\ U_3 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } -2x_1 + x_2 \leq 2\} \quad . \end{array}$$

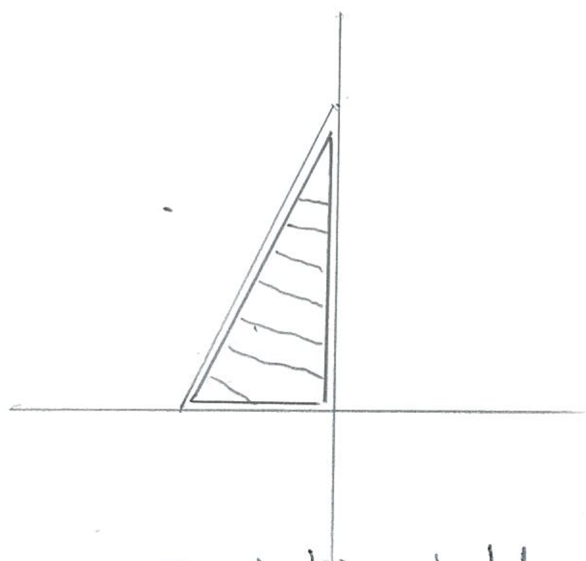
Ces sous-ensembles U_1, U_2 et U_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités strictes < 0, > 0 et < 2. Ceus sont des ouverts de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble U est donc ouvert comme intersection de trois ouverts. Cet ensemble U est contenu dans K. Sa représentation géométrique est l'intérieur du triangle T qui représente K (ou encore le triangle T moins son bord).

Si le maximum de la restriction de f à K est atteint en un point (a, b) de U, comme U est un ouvert inclus dans K ce serait un extremum local de f. Ce serait donc un point critique de f. Nous aurions donc $(a, b) = (\frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$. Or, ce point n'appartient pas à K. Par exemple, car $-\frac{7}{10}$ n'est pas positif ou nul ou encore geométriquement car le point de coordonnées $(\frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$ n'est pas dans le triangle T. D'ou la contradiction. Ainsi, les points de K où la restriction de f à K sont maximum ne sont pas dans U. De même les points de K où la restriction de f à K sont minimum ne sont pas dans U.





représentation de K



représentation de U