

Feuille 2
Équations de droites, de demi-plans
Ouverts, fermés et bornés de \mathbf{R}^n

Exercice 1 –

- a) Donner la représentation graphique de $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = 1\}$.
- b) Puis, donner la représentation graphique de $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 < 2\}$.
- c) Expliquer géométriquement à partir de la définition des ensembles ouverts pourquoi H est un sous-ensemble ouvert de \mathbf{R}^2 .

Exercice 2 –

- a) Représenter la droite D d'équation $\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 2$. Puis, représenter le demi-plan H d'équation $\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \geq 2$.
- b) Quel est le complémentaire $\mathbf{R}^2 - H$ de H dans \mathbf{R}^2 . Représenter $\mathbf{R}^2 - H$.
- c) Expliquer géométriquement à partir de la définition des ensembles fermés pourquoi H est un sous-ensemble fermé de \mathbf{R}^2 .

Exercice 3 –

- a) Représenter les points A et B de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(5, 0)$. Donner une équation de la D droite passant par ces deux points.
- b) Donner une équation du demi-plan formé des points strictement contenus d'un même coté de D et qui contient le point C de coordonnées $(2, 2)$

Exercice 4 –

- a) On considère l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 > 0\}$. Représenter graphiquement cet ensemble. Cet ensemble A est-il un ouvert (on demande une explication géométrique) ? Quel est le complémentaire $\mathbf{R}^2 - A$ de A dans \mathbf{R}^2 ? Représenter ce complémentaire. L'ensemble A est-il fermé, borné (on demande des explications géométriques) ?
- b) Mêmes questions avec $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 = 0\}$.
- c) Mêmes questions avec $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 + x_2 \leq 1\}$.
- d) Mêmes questions avec $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1^2 + x_2^2 = 9\}$.
- d) Mêmes questions avec $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 < 9\}$.

Exercice 5 – On pose :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geq 0\} \quad , \\ A_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 \geq 0\} \quad , \\ A_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 + x_2 \leq 1\} \quad . \end{aligned}$$

- a) Représenter l'ensemble $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
- b) Montrer que A est un ensemble fermé et borné de \mathbf{R}^2 et non ouvert.