Feuille 3
Domaine de définition de fonctions numériques et calculs de dérivées

Exercice 1 – On considère la fonction numérique :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{2}{\sqrt{x_1 + x_2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 3}} \quad .$$

1) Préciser et dessiner le domaine de définition de f.
2) Expliquer pourquoi ce domaine de définition est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, puis justifier que c'est un ensemble non borné de $\mathbf{R}^2$ (On pourra utiliser qu'une intersection d'ouverts est un ouvert).
On considère la fonction numérique :

$$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto 17\sqrt{x_1 + x_2 - 1} - \sqrt{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 3} \quad .$$

3) Préciser et dessiner le domaine de définition de g.
4) Ce domaine de définition est-il un ouvert de $\mathbf{R}^2$? un fermé de $\mathbf{R}^2$?

Exercice 2 – On considère la fonction numérique :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{2}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x_1 - x_2}} \quad .$$

1) Quelle est la valeur de l'image de $(1/4, 1/4)$ par f ?
2) Préciser et dessiner le domaine de définition de f.
3) Montrer que ce domaine de définition est un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$ (On pourra utiliser qu'une intersection d'ouverts est un ouvert).

Exercice 3 – Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}.\ x \mapsto 3x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5 \quad \mathbf{2}.\ x \mapsto \frac{3x^2 + 2x}{3x^2 + 2} \quad \mathbf{3}.\ x \mapsto \frac{5}{x^5} - \frac{1}{x^7} - x^2 + 6 \quad .$$

Exercice 4 – Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}.\ x \mapsto e^{x^3 - 3x + 1} \quad \mathbf{2}.\ x \mapsto ln(\frac{2x + 1}{3x - 2}) \quad .$$

Exercice 5 – On considère la fonction :

$$\begin{cases} f : & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ & (x_1,\, x_2) & \mapsto & 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 14x_2 - 1 \quad . \end{cases}$$

1) Quel est le domaine de définition de la fonction f ? Quelle est la nature de cette fonction ? Pourquoi admet-elle des dérivées partielles ?
2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
3) Mêmes questions avec les fonctions :

$$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5 \quad ,$$
$$h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = x_1x_2 - 5 \quad .$$