Feuille 4
Calculs de dérivées partielles partielles

Exercice 1 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5} \quad .$$

1) Déterminer son ensemble de définition. Justifier que cet ensemble est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2) Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier que f admet des dérivées partielles à tout ordre sur son ensemble de définition.
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f, c'est à dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \quad .$$

Que remarquez-vous entre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}$.

Exercice 2 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2 + 3x_2^2}{x_1 + 2x_2} \quad .$$

1) Déterminer son ensemble de définition. Justifier que cet ensemble est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2) Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier que f admet des dérivées partielles à tout ordre sur son ensemble de définition.
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
4)Vérifier que pour tout (x_1, x_2) dans le domaine de définition de f :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad .$$

Exercice 3 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ (x_1, x_2, \lambda) \longmapsto f(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + 7x_2 + \lambda(x_1 - 3x_2 + 3) \quad .$$

1) Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier que f admet des dérivées partielles à tout ordre sur son ensemble de définition.
2) Calculer les trois dérivées partielles d'ordre 1 de f.
3) Calculer les neuf dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Exercice 4 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}\ ;\ (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = e^{x^3 + xyz - y^2} \quad .$$

1) Calculer les trois dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2) Mêmes questions avec les fonctions :

$$g(x, y, z) = e^{x^3 + xyz - y^2} \quad \text{et} \quad h(x, y, z) = ln(x^3 + xyz - y^2) \quad .$$