Licence de Sciences Économiques | Année 2016-2017
Université de Nice Sophia-Antipolis | Mathématiques L1

Feuille 5

Croissance , points critiques, identité de Schwarz, fonction continue sur un fermé borné de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 1 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{x_1^3 + x_2^2 + 5x_3^3} \quad .$$

1) Préciser son ensemble de définition. Justifier que cet ensemble est un ouvert de $\mathbf{R}^3$.
2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Exercice 2 – On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 17 \quad .$$

1) Quelle est la nature de la fonction f ? Justifier que f admet des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbf{R}^2$.
2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f. Vérifier l'identité de Schwarz.
3) On rappelle la formule $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Montrer que à x_2 fixé, la fonction :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 - x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 17$$

est croissante.
4) Déterminer les points critiques de f.

Exercice 3 – On désigne par K et V les sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} K &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tels que} \quad x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \text{ et } x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\ V &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tels que} \quad x_1 > 0 \ , \ x_2 > 0 \text{ et } x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad . \end{aligned}$$

1) Montrer que K est un fermé de $\mathbf{R}^2$ et V est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Représenter avec soin K et V. Justifier que K et V sont des ensembles bornés de $\mathbf{R}^2$. On considère la fonction f :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \ ; \ (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 7x_2 + 17 \quad .$$

2) Pourquoi f admet-elle des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbf{R}^2$. Déterminer les points critiques de f ?
3) Justifier que la restriction g de f à K:

$$K \to \mathbf{R} \ ; \ (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 7x_2 + 17 \quad .$$

admet un maximum en un point de K.
4) Montrer que ce point n'appartient pas à V.