Licence de Sciences Économiques — Année 2016-2017
Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

Feuille 6
extremum libre, extremum avec contrainte

Exercice 1 –
On considère la fonction

$$\begin{cases} f \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 4. \end{cases}$$

1. Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2. Montrer que f a un unique point critique.
3. En ce point critique, la fonction f admet-elle un extremum local ? Dans ce cas, s'agit il d'un maximum local ou d'un minimum local ?

Exercice 2 – On considère la fonction

$$\begin{cases} f \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 + 17 \end{cases}$$

1. Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2. Montrer que f admet deux points critiques.
3. Quelle est la nature de ces point critiques : la fonction y admet-elle un extremum local, maximum local, minimum ?

Exercice 3 –
Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ \quad (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + x_2)^2 - 4x_1 - 2x_2 + 7. \end{cases}$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction h..
2. Chercher les points critiques de h.
3. Quelle est la nature de chaque point critique

Exercice 4 – (Deuxième session 2006) On considère la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \ln(x_1 + 1) + 2\ln(x_2 + 1) \quad .$$

1) Déterminer le domaine de définition de f et le représenter graphiquement.
On restreindra dans la suite la fonction f à son domaine de définition.
2) Calculer alors les dérivées partielles d'ordre un de f. On considére la fonction :

$$g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 - 10 \quad .$$

3) Déterminer un couple de réel (x_1, x_2) satisfaisant $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x_1, x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = 0 \end{array} \right. \quad .$$

On note $\Omega = \{(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$ et $h : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$(x_1,\, x_2, \lambda) \longmapsto h(x_1,\, x_2, \lambda) = \ln(x_1 + 1) + 2\ln(x_2 + 1) + \lambda(2x_1 + 5x_2 - 10) \quad .$$

4) Déterminer les points critique de h, c 'est à dire les points (x_1, x_2, λ) de Ω tels que

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,\, x_2, \lambda) = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,\, x_2, \lambda) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1,\, x_2, \lambda) = 0 \quad .$$

5) On suppose que la restriction de f au sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ définie par l'équation $g(x_1, x_2) = 0$ admet sur $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$ un extremum local. Déterminer en quel point cet extremum local est atteint et sa valeur. (On utilisera un résultat du cours).

Exercice 5 – Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.
Soit $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
On pose $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.
1) Montrer que S est un fermé borné de $\mathbf{R}^3$.
2) Préciser ce qu'est la restriction $f_{|S}$ de f à S ?
3) Montrer en citant un thèorème du cours qu'il existe un point $a = (a_1, a_2, a_3)$ de S tel que la restriction $f_{|S}$ de f à S admet un maximum et un point $b = (b_1, b_2, b_3)$ de S tel que la restriction $f_{|S}$ de f à S admet un minimum.
4) Quels sont les points critiques de g ?
Soit $h : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $(x_1, x_2, x_3, \lambda) \mapsto h(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda(g(x_1, x_2, x_3) - 1)$.
5) Déterminer les points critiques de h.
6) Déduire d'un théorème du cours que l'on précisera les points où la retriction $f_{|S}$ de f à S admet un maximum et ceux où cette restriction admet un minimum. Que cela signifie t'il pour les valeurs prises par f ?