

Feuille 7
Fonctions homogènes

Exercice 1 –

On considère la fonction :

$$\begin{cases} f : \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto f(x_1, x_2) = 2x_1^{17} - 3x_1^3x_2^{14} + 2x_2^2x_1^{15}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est homogène. On précisera son degré d'homogénéité.
2. Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. Calculer ces dérivées partielles d'ordre 1.
3. Ecrire l'identité d'Euler que vérifie f . Vérifier cette identité.

Exercice 2 – On considère $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } 2x_1 + x_2 \neq 0\}$.

1) Montre que C est un cône positif de \mathbf{R}^2 . Représenter C . Cet ensemble est-il ouvert ?

Soit g l'application :

$$g : C \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 3x_2}{2x_1 + x_2} \quad .$$

- 2) Montrer que g est homogène. On précisera son degré d'homogénéité.
- 3) Justifier en une phrase que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues. Calculer ces dérivées partielles d'ordre 1.
- 4) Ecrire l'identité d'Euler que vérifie g . Vérifier cette identité.
- 5) Même question avec la fonction :

$$h : C \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 3x_2}{(2x_1 + x_2)^2} \quad .$$

Exercice 3 – On considère la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 3x_2}{\sqrt{2x_1 + x_2}} \quad .$$

- 1) Quelle est le domaine de définition de f . Représenter cet ensemble que l'on notera D . Cet ensemble est-il ouvert ?
- 2) Montrer que l'application :

$$D \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 3x_2}{\sqrt{2x_1 + x_2}} \quad .$$

est homogène. On précisera son degré d'homogénéité.

- 3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f . Quelle identité vérifie ces dérivées partielles ?

Exercice 4 – On considère la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad .$$

- 1) Quelle est le domaine de définition de f . Représenter cet ensemble que l'on notera D . Cet ensemble est-il ouvert ?
- 2) Montrer que l'application :

$$D \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

est homogène. On précisera son degré d'homogénéité.

- 3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f . Quelle identité vérifie ces dérivées partielles ? Vérifier cette identité.