Description des résultats de Recherche
Liste de publications 2016
Ph. Maisonobe

La géométrie algébrique est l'étude des lieux où une famille de polynômes de plusieurs variables s'annulent appelés variétés algébriques. Ces variétés apparaissent donc comme les pôles de certaines fonctions méromorphes. Ces fonctions méromorphes se dérivent et sont solutions de systémes d'équations aux dérivées partielles. Ce lien entre géométrie algébrique et systèmes différentiels illustre un mes axes de recherche favori.

Mes axes de recherche se situent plus généralement en géométrie algébrique ou analytique, en théorie des singularités et dans la théorie algébrique des systèmes différentiels.

Mes contributions portent sur les faisceaux pervers, les cycles évanescents, les polynômes de Bernstein et les liens des systèmes différentiels avec la théorie des singularités issus de la correspondance de Riemann-Hilbert entre faisceaux pervers et D-modules holonomes réguliers.

Couple canonique variation du système de Gaus-Manin :

Mon premier travail de recherche R 1 a été dirigé par F. Pham. Il porte sur l'interprétation du couple formé des morphismes canonique et variation entre les cycles proches et les cycles évanescents d'une singularité isolée en terme de solutions et micro-solutions du système de Gauss-Manin. **Il constitue la première remarque entre cycles évanescents à la P. Deligne et microlocalisation à la M. Sato**.

Théorème de division en théorie des $\mathcal{D}$-Modules :

En algèbre commutative les théorèmes de division (bases standards ou bases de Gröbner) sont les outils de base du calcul formel. Avec J. Briançon, nous étendons dans R 4 les techniques de division de la géométrie algébrique à l'anneau des opérateurs différentiels. **Cet article a été le premier article où les techniques de Bases de Gröbner ou de divisions sont apparues en théorie des $\mathcal{D}$-Modules**. Une des applications que nous donnions portait sur la structure des idéaux d'opérateurs différentiels à une variable et sur la classification des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers à une variable.

La classification des sytémes différentiels de plusieurs variables liés à la géométrie était alors plus largement à développer. Suivant la correspondance de Riemann-Hilbert de Z. Mebkhout et M. Kashiwara, ces objets algébriques appelés D-modules holonomes réguliers forment une catégorie équivalente à une catégorie d'objets géométriques comme des familles de vecteurs appelée faisceaux pervers. Je me suis alors naturellement intéressé à l'étude de la catégorie des faisceaux pervers.

Classification locale de faisceaux pervers :

Nous traitons dans R 5 avec M. Granger et A. Galligo le cas important des **faisceaux pervers relativement à un croisement normal** en reliant cette catégorie à celle d'hypercubes d'espaces vectoriels. Ce cas est crudial, car par résolution des singulariés il domine toutes les autres situatuions.

Puis, je traite dans R 8 le cas **des faisceaux pervers relativement à toute courbe plane**. Grâce à des théorèmes de prolongement, ce cas est clef pour analyser les faisceaux pervers en toute dimension. Voir par exemple la thèse de R. Bondu où il montre l'existence du déterminant microlocal. Ce travail constitue mon travai de thèse d 'état.

Après ces travaux, je commence avec J. Briançon à travailler sur le polynôme de Bernstein-Sato associé à une fonction f holomorphe. Ce polynôme est le polynôme unitaire $b(s)$ de plus petit degré vérifiant une équation fonctionnelle: $b(s)f^s = Pf^{s+1}$ où P est un opérateur différentiel dépendant polynomialement de s. Les racines de ce polynôme sont des nombres rationels liés aux valeurs propres de la monodromie agissant sur la cohomologie des fibres de Milnor de f (B. Malgrange, M. Kaschiwara).

Calcul d'équations fonctionnelles du type Bernstein-Sato :

Nous donnons dans R 11 un **algorithme de calcul de l'équation fonctionnelle de Bernstein-Sato des singularités non dégénérées**. Il s'agit du premier algorithme de calcul de polynôme de Bernstein. Cet algorithme trés rapide explique la nature des racines du polynôme de Bernstein comme poids d'homogénéité de certains monômes. Nous reviendrons sur cette question avec T. Torrelli avec lequel nous déterminons dans R 28 une équation fonctionnelle de Bernstein-Sato pour tout germe de courbe plane.

Polynôme de Bernstein relatif :

Une question naturelle était de comprendre comment varie le polynôme de Bersnstein dans une famille de fonctions. Si les ensembles géométriques définis par cette famille ne varient pas trop, une conséquence de l'invariance de la monodromie implique que les racines de leurs polynômes de Bersnstein sont constantes modulo un entier relatif. Mais, les premiers exemples montrent qu'elles ne sont pas constantes. Avec J. Briançon, nous **définissons le polynme de Bernstein relatif et le polynôme de Bersnstein générique** Nous donnons dans R 13 avec Y. Laurent **une caractérisation géométrique de l'existence d'un polynôme de Bersnetin relatif**. En particulier, nous obtenons que, pour une déformation d'une singularité isolée à un paramètre, l'existence d'un polynôme de Bernstein relatif équivaut au fait que la déformation de la singularité soit à nombre de Milnor constant. Ces résultats montrent la pertinence de notre notion de polynômes de Bernstein relatifs.

Avec M. Merle et J. Briançon, nous collaborons ensuite sur des questions liées aux stratifications de morphismes analytiques.

Stratification d'un morphisme : Nous montrons dans R 15 que pour une application holomorphe dont le but est de dimension 1, **l'existence d'une stratification qui vérifie la condition de Thom équivaut au fait que les strates de la stratification du morphisme vérifient la condition a de Whitney et une condition de trivialité locale** plus faible que la condition b. Si la théorie des D-modules peut disparaître de notre démonstration, cette dernière doit beaucoup à la correspondance entre les théories des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers et la théorie des singularités. Ce résultat publié aux Inventiones été très remarqué dans la communauté des singularistes.

M. Kashiwara et B. Malgrange ont défini une V-filtration le long d'une hypersurface d'un $\mathcal{D}$-module holome régulier M et ont montré que cette V-filtration calcule les cycles évanescents du complexe des solutions de M. Leur résultat a ouvert la voie d'un traitement algébrique des cycles évanescents d'un complexe de faisceau constructible au sens de P. Deligne qui m'a interessé.

Théorie des cycles évanescents :

Afin d'obtenir les résultats les plus généraux sur la constance de la monodromie des déformés d'une fonction ou de leurs spectres, je reprends avec T. Torrelli la notion de V-filtration relative que nous avions introduite dans R 17 avec M. Granger et J. Briançon. Nous montrons algébriquement dans R 26 que, le long de certaines déformations, les monodromies des fibres de Milnor d'une fonction sur un espace singulier sont conjuguées ce qui généralise de manière algébrique des résultats de Le D.T. et B. Teissier. Puis dans R 27, avec A. Dimca et M. Saito , **nous montrons toujours algébriquement que le spectre au sens de J. Steenbrink associé à un Module de Hodge mixte M et à une fonction holomorphe f est constant sur les strates d'une stratification associée aux restrictions de f sur les projections sur X des composantes irréductibles de la variété caractéristique de M**. Ce résultat généralise les résultats de J. Steenbrink et N. Varchenko sur la constance du spectre d'une déformation à nombre de Milnor constant d'une singularité isolée. Dans R 29, nous étendons la définition du spectre d'une singularité au cas d'un sous-espace arbitraire et y généralisons les résultats obtenus précédemment.

Sur une variété X, lorsque nous disposons d'une section m d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome et de plusieurs fonctions analytiques ou algébriques $f_1, \ldots, f_p$, nous pouvons considérer localement $\mathcal{B}(m, f_1, \ldots, f_p)$ l'idéal de $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ des polynômes b vérifiant localement :

$$b(s_1, \ldots, s_p) m f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]\, m f_1^{s_1+1} \ldots f_p^{s_p+1} \, .$$

où $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$ désigne les opérateurs différentiels à coefficients des fonctions sur X dépendant polynomialement de $s_1, \ldots, s_p$. C. Sabbah montre l'existence localement d'un ensemble fini $\mathcal{H}$ de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans $\mathbf{N}$ telles que :

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_{\mathcal{H}}} (H(s_1, \ldots, s_p) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \ldots, f_p) \, ,$$

où $\alpha_{H,i}$ sont des nombres complexes. Cet idéal généralise au cas de plusieurs fonctions le polynôme de Bersntein-Sato. Il permet d'analyser le prolongement méromorphe d'intégrales du type

$$I_\phi(s_1, \ldots, s_p) = \int_X \mid f_1(x) \mid^{s_1} \ldots \mid f_p(x) \mid^{s_p} \phi(x)\, dx \wedge d\overline{x} \, ,$$

ou des cohomologies du complémentaire de la réunion des hypersurfaces d'équations $f_i = 0$.

Polynômes de Bernstein associés à plusieurs fonctions :

Dans R 32, je montre qu'**il existe une ensemble $\mathcal{H}$ minimal de forme linéaire appelé l'ensemble des pentes intervenant dans l'ensemble de C. Sabbah**. Cet ensemble de pentes se définit à partir de variétés caractéristiques relatives et géométriquement si m est une section d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier. J'obtiens de plus un résultat sur **la structure de la variété des zéros de l'idéal de Bernstein**.

Dans R 33, je suppose que les f_i sont des formes linéaires. Ces fonctions définissent alors un arrangement d'hyperplans linéaires. Je montre alors que **l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(f_1, \ldots, f_p)$ d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires** au sens de K. Saito **est principal et en détermine un générateur** à l'aide de la configuration de l'arrangement. J'obtiens ainsi une identité fonctionnelle remarquable.

Nous donnons notamment dans R 22 et R 23 avec J. Briançon et M. Merle en 2002 une condition géométrique dite ''sans pente'' nécessaire et suffisante caractérisant l'existence d'un polynôme de Bernstein produit de polynômes d'une seule variable. C'est le cas où les pentes sont réduites aux hyperplans de coordonnées. Les modules holonomes réguliers ''sans pente'' relativement à plusieurs fonctions sont un cas particulier des modules multispécialisables que je définis dans R 30. **Je construis pour ces modules M une V-multifiltration canonique et je montre que le gradué Psi(M) de cette V-multifiltration coincïde avec l'itération sur M des gradués des V-filtrations définies par chaque fonction** au sens de Malgrange-Kashiwara.

Des fonctions analytiques $f_1, \ldots, f_p$ définissent un morphisme f dans $\mathbf{C}^p$. Sous l'hypothèse sans pente relativement à plusieurs fonctions, les images directes locales par f d'un faisceau pervers sont des complexes constructibles relativement à un croisement normal.

Théorie des cycles évanescents des moprhismes sans pente :

Dans R 31, je définis suivant P. Deligne les cycles évanescents $\Psi_f(\mathcal{F})$ d'un tel faisceau pervers $\mathcal{F}$ par le morphisme f sans pente. J'obtiens que $\Psi_f(\mathcal{F})$ est un faisceau pervers qui coincïde avec l'itération des cycles évanescents le long de chaque f_i. Suite aux résultats algébriques sur les modules multispécialisables décrits ci-dessus, **je généralise aux ''morphismes sans pente'' la correspondance de M. Kashiwara et B. Malgrange entre V-filtration le long d'une hypersurface et cycles évanescents**. Cette généralisation peut être vue comme une théorie sectorielle des cycles évanescents par un morphisme, car suivant C. Sabbah, il est possible de se ramener à la situation sans pente par des éclatements au but.

Publications

R 1 "Solutions du système de Gauss-Manin d'un germe de fonction à point critique isolé"
En collaboration avec J.E. Rombaldi,
Progress In Math, Vol 2, Birkhäuser, (1979).

R 2 "Lieu Discriminant d'une application de corang 1 de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$"
Thèse de $3^{ème}$ cycle, Université de Nice, p. 1-94, 10 Juin 1981,

R 3 "Lieu Discriminant d'une application de corang 1 de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$"
Annales de l'Institut de Fourier, p. 91-118, (1982).

R 4 "Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable"
En collaboration avec J. Briançon,
L'Enseignement mathématique, p. 7-38, (1984).

R 5 "$\mathcal{D}$ Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal"
En collaboration avec A. Galligo et M. Granger,
Annales de l'Institut de Fourier, p. 1-48, (1985).

R 6 "$\mathcal{D}$ Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal II"
En collaboration avec A. Galligo et M. Granger,
Astérisque 130, p. 240-259, (1985).

R 7 "Faisceaux pervers relativement à un point de rebroussement"
En collaboration avec M. Granger,
Note au C.R.A.S., t.299, Série 1, n 12, (1984).

R 8 "$\mathcal{D}$ Modules et faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane"
Thèse d'Etat, Université de Nice, 79 p., 22 Juin 1985.

R 9 "Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane"
Compositio Mathematica 62, p 215-261, (1987).

R 10 "Germes de $\mathcal{D}$ Modules à une variable et leurs solutions et faisceaux pervers sur $\mathbf{C}$ relativement à $\{0\}$ et couple $E \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}} F$"
Travaux En Cours 34, Hermann, p 97-146, (1988).

R 11 "Le nombre de Modules du germe de courbe plane $x^a + y^b = 0$"
En collaboration avec J. Briançon et M. Granger,
Math. Ann., 279, p 535-551, (1988).

R 12 "Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: cas non dégénéré"
En collaboration avec J. Briançon, M. Granger, M. Miniconi.
Annales de l'Institut Fourier 39, 3, p 553-610, (1989).

R 13 "Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein"
En collaboration avec J. Briançon, F. Geandier.
Bulletin de la Société Mathématique de France, 120, p 15-49, (1992).

R 14 "Sur les $\mathcal{D}$ Modules holonomes réguliers, cohérent relativement à une projection"
En collaboration aves J. Briançon et Y. Laurent.
C.R. Acad. Sci. Paris, t.313, Série 1, p 285-288, (1991).

R 15 "Cours de base sur les $\mathcal{D}$ Modules"
En collaboration aves M. Granger.
Les cours du Cimpa, Volume 45, Travaux en Cours, Hermann, p. 104-168, (1993).

R 16 "Localisation des systèmes différentiels, stratifications de Whytney et conditions de Thom"
En collaboration avec J. Briançon et M. Merle.
Invent. math. 117, p. 531-550, (1994).

R 17 "Overview on the $\mathcal{D}$ Modules"
In "Computer Algebra and Differential Equation",
London Mathematical Society 193, p. 21-55, (1994).

R 18 "Sur les systèmes différentiels relativement spécialisables et l'existence d'équations fonctionnelles relatives"
En collaboration avec J. Briançon et M. Granger.
Bulletin de la Société Mathématique de France, 124, p 217-242, (1996).

R 19 "Sur la variété caractéristique de systèmes différentiels irréguliers le long d'une hypersurface"

En collaboration avec J. Briançon.
C.R.Acad. Sci.Paris, t 320, Série 1, p. 285-288, (1995).

R 20 "Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif"
En collaboration avec J. Briançon.
Progess in Mathematics , Vol 134, p. 215-236, (1996).

R 21 "Espaces conormaux relatifs 2, Modules différentiels"
En collaboration avec H. Biosca, J. Briançon et H. Maynadier.
Publication R.I.M.S. vol. 34.2, p. 123-134, (1998).

R 22 "Constructibilité de l'idéal de Bernstein"
En collaboration avec J. Briançon et M. Merle,
Advances Studies in Pure Mathematics 29, Singularities Sapporo 1998, p.79-95, (2000).

R 23 "Eventails associés à des fonctions analytiques"
En collaboration avec J. Briançon et M. Merle,
procedings du Steklov Institut, vol. 238, p.70-80, (2002).

R 24 "Equations fonctionnelles associés à des fonctions analytiques"
En collaboration avec J. Briançon et M. Merle,
procedings du Steklov Institut, vol. 238, pp. 86-96, (2002).

R 25 "Image inverse en théorie des D-modules",
Dans Séminaires et Congrès, vol. 8.
Société mathématique de France, p. 1-57 , (2004).

R 26 "Le Théorème de comparaison pour les cycles évanescents"
En collaboration avec Z. Mebkhout
Dans Séminaires et Congrès, vol. 8.
Société mathématique de France, p. 311-391, (2004).

R 27 "D-modules relatifs et cycles évanescents"
En collaboration avec T. Torrelli
Institut Elie Cartan, vol. 18, Singularités , p. 125-137, (2006).

R 28 "Multiplier ideals, V-filtrations and transversal sections"
En collaboration avec A. Dimca A., M. Saito et T. Torrelli T.,
Math. Ann., vol. 336, p 901-924, (2006).

R 29 "Matrice magique associée à un germe de courbe plane et division par l'idéal jacobien"

En collaboration avec J.Briançon et T. Torrelli
Annales de l'Institut Fourier 3, 57 (2007) 919

R 30 "Spectrum and multiplier ideals of arbitrary subvarieties"
En collaboration avec A. Dimca et M. Saito
Annales de l'institut Fourier, 61 no. 4 (2011), p. 1633-1653

R 31 "Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente"
Journal of Singularities Volume 7 (2013), 157-189

R 32 "Filtration Relative, l'Idéal de Bernstein et ses pentes"
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285562, 2016

R 33 L'idéal de Bernstein d'un arrangement libre d'hyperplans linéaires
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01320796, 2016

0.1 Éditions

1. "Systèmes différentiels et singularités"
   Éditeurs : A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe
   Astérique 130, 1985,

2. "D-Modules cohérents et holonomes"
   Éléments de la Théorie des systèmes différentiels
   Éditeurs : Ph. Maisonobe et C. Sabbah
   Cours du CIMPA
   Travaux en Cours, vol. 45, p. 168, 1993

3. "Images directes et constructibilité"
   Éléments de la Théorie des systèmes différentiels
   Éditeurs : Ph. Maisonobe et C. Sabbah
   Cours du CIMPA
   Travaux en Cours, vol. 46, 116 p., 1993

4. "Éléments de la Théorie des systèmes différentiels géométriques"
   Éditeurs : Ph. Maisonobe et L. Narvaez- Maccaro
   Société mathématique de France, 2004. 430 p. . Séminaires et Congrès, vol. 8

0.2 Livre

1. "Éléments d'algèbre commutative"
   Niveau M1.Cours et exercices corrigés
   En collaboration avec J.Briançon
   Mathématiques à l'Université, Cours et Exercices corrigés
   Ellipses-Marketing, 2004. 180 p..