

2

Ch. 3. Stabilité. Exemples de comportement en grand temps pour des systèmes non linéaires...

3.1. Introduction. Système linéarisé:

On considère un système diff. (autonome, pour simplifier) (1)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^N$$

On suppose que f vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, globales ou locales.

Soit x_0 un pt d'équilibre de (1): $f(x_0) = 0$. (2)

Def 1: (i) On dit que x_0 est un point d'équilibre stable si

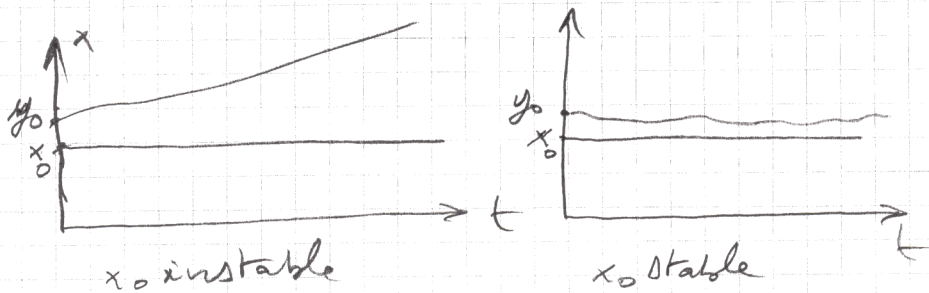
\exists une boule $B(x_0, r)$ tq $\forall y_0 \in B(x_0, r)$, i.e. $\forall y_0$ tq $\|x_0 - y_0\| \leq r$, la solution x de (1), tq $x(t_0) = y_0$, (3)

est définie sur $[0, +\infty[$ tout entier, et vérifie: $\forall t \geq t_0, \|x(t) - x_0\| \leq C \|y_0 - x_0\|$. (4)

Le système étant supposé autonome, on peut e.g. supposer que $t_0 = 0$.

(ii) On définit de même la stabilité d'une solution $\{t \mapsto x(t)\}$ supposée définie sur $[0, +\infty[$ tout entier.

(iii) On dit que [la solution $\{t \mapsto x(t)\}$, ou en particulier que] le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable si $\exists B(x_0, r)$ et une fonction $\gamma: [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tq $\gamma(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$), et tq (4) soit remplacée par: $\forall x$ solution de (1), (3); $\|x(t) - x_0\| \leq \gamma(t) \|x_0 - y_0\|$. (4')



2

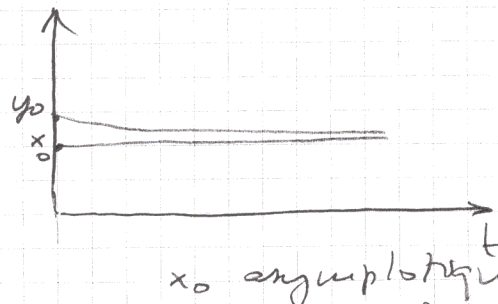


Figure 1

Rem 1: si $f(x) = Ax$ est un système linéaire, à coefficients constants, homogène, alors $x_0 = 0$ est un équilibre stable si toutes les valeurs propres λ_k , $1 \leq k \leq N$, de A vérifient

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0, \text{ et si } \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0, \text{ alors (5)} \\ \lambda_k \text{ ne correspond pas à un bloc de Jordan.} \end{cases}$$

De même, $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable si $\forall k$, $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$. (6)

Dans le cas non linéaire, si x_0 est un p.e. d'équilibre de (1), i.e. si $f(x_0) = 0$, (2) on considère le système linéarisé de (1) au point x_0 , i.e. le système:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f'(x_0) X(t), \text{ où } x_0 := (x_{0,1}, \dots, x_{0,N}) & (7) \\ f'(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(x_0), & \dots, & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix} := \text{matrice} \\ \text{:= } Df(x_0) & \text{jacobienne} \\ & \text{de } f \text{ en } x_0 & (8) \end{cases}$$

Thm 1:

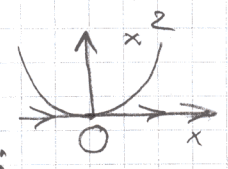
le système (7) est asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres λ_k de la matrice jacobienne $f'(x_0)$ vérifient:
 $\forall k, \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0.$ (6)

Dém. Admise. Par contre, si $\exists k$ valeur propre de $A := f'(x_0)$ tq $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$, on ne peut pas décider si x_0 est un point d'équilibre stable ou non. N

Exemple: $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^3 \\ \dot{y} = \beta y^3 \end{cases}$ (9) le pt d'équilibre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc $(0, 0)$ est un point d'équilibre stable du système linéarisé, mais pas asymptotiquement stable. Si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$, $(0, 0)$ est un point d'équilibre instable du système non linéaire (9). \square

Rem. 2: Dans le cas scalaire, $N=1$, cf TD $0 \in \mathbb{R}$ est point d'équilibre stable de l'équation linéarisée (en 0): $\dot{x} = 0 \cdot x$

mais pas de l'équation non linéaire $\dot{x} = x^2 = f(x)$. Figure 2:



Par contre 0 et K sont respectivement points d'équilibre instable et asymptotiquement stable à la fois de l'éq. non linéaire $\dot{x} = f(x) = x(K-x)$, et du pt linéarisé respectivement en $x=0$: $\dot{X} = KX$ et en $x=K$: $\dot{Y} = (K-2K)Y$:

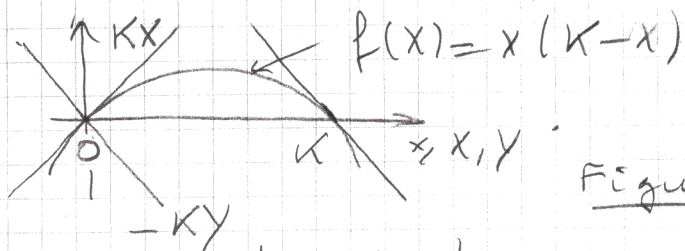


Figure 3

§ 2 - Fonction de Lyapunov - Systèmes de flot-gradient
 Def 2 : Fonction de Lyapunov.

Soit un système (1) supposé autonome [on peut toujours s'y ramener en ajoutant la variable $x_0 := t$]. On dit qu'une fonction $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour (1) si, pour toute solution $\{t \mapsto x(t)\}$ de (1), on a

$$\frac{d}{dt} \psi(x(t)) \leq 0, \quad (10)$$

$$\text{i.e. } \text{grad}_x \psi(x_1(t), \dots, x_N(t)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

$$\equiv \underbrace{\text{grad}_x \psi(x_1(t), \dots, x_N(t))}_{= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_N} \right)} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_N(x(t)) \end{pmatrix} \leq 0, \quad (11)$$

$$\text{si } x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier, si $f(x) = -\text{grad}_x \psi(x)$ (11)

on dit alors que (1) est un flot de gradient alors ψ est évidemment fonction de Lyapunov pour le système (1), (11). Dans ce cas, on voit

$$\text{que } \frac{d}{dt} \psi(x(t)) = -\|\text{grad}_x \psi(x(t))\|^2 \leq 0, \quad \text{et } \leq 0 \text{ sauf si } \text{grad}_x \psi(x(t)) = 0. \quad \square$$

Conséquence : Thm 2

Si (1) est un flot de gradient, i.e. n° f vérifie (11), avec $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, uniformément convexe, de classe C^2 , alors ψ a un unique minimum:
 $\exists! x^* \in \mathbb{R}^N$ tq $\psi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \psi(x)$, et

dans ce cas, $\forall x_0$, l'unique solution de (1) tq $x(t_0) = x_0$ est définie $\forall t \geq t_0$, et $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x^*$ (2)

exponentiellement:

$$\|x(t) - x^*\| \leq e^{-t \min_{1 \leq k \leq N} \alpha_k} \cdot \|x_0 - x^*\|, \quad (3)$$

où les α_k sont les valeurs propres réelles, ≥ 0 , de la matrice Hesseienne

$$D^2 \psi(x^*) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_1}(x^*), & \dots, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_N}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_N \partial x_1}(x^*), & \dots, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_N \partial x_N}(x^*) \end{pmatrix}$$

Donc x^* est asymptotiquement stable.

Dém. admise, mais facile! Noter que (1) est non linéaire.

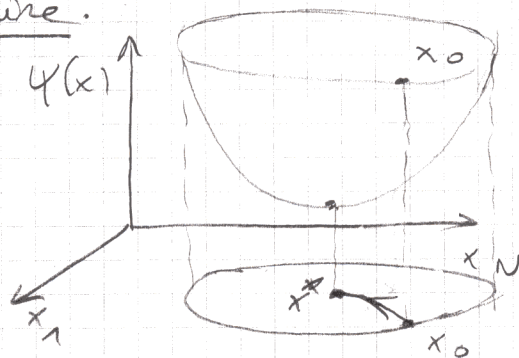


Figure 5: $N = 2$

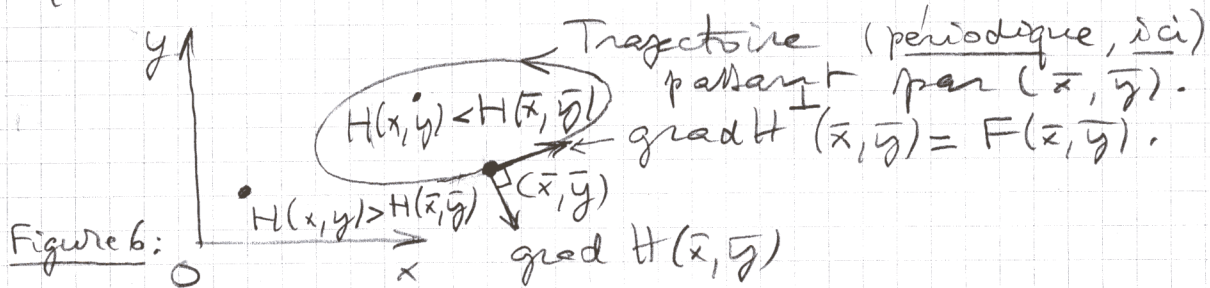
- Rem. 3: Tous les systèmes (l'un peut pas des flots de gradient !! l'autre extrême est celui des systèmes ayant une intégrale première, en particulier des systèmes Hamiltoniens. Le cas simple est le suivant :

§ 3. Systèmes Hamiltoniens dans \mathbb{R}^N , $N=2$

- On remplace \mathcal{V} par $H: x \in \mathbb{R}^N \mapsto H(x) \in \mathbb{R}$.
 H est appelée l'Hamiltonien (= "l'énergie totale" (cinétique + potentielle) en mécanique). C'est encore une fonction de Lyapunov, mais elle ne \searrow pas le long des trajectoires : elle reste constante le long de toute trajectoire : c'est donc une intégrale première du système (1').

- Def. 3 : on dit qu'un système diff (1') (autonome) dans \mathbb{R}^2 (ou plus généralement dans \mathbb{R}^N , N pair) est Hamiltonien s'il existe $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq
- $$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = F(X(t)) = (\text{grad}_X^\perp H)(X(t)),$$
- i.e.
- $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1')$$
- la fonction $H(\cdot, \cdot)$ est l'Hamiltonien du système (1') : c'est une intégrale première de (1').

- Les trajectoires de (1') ont l'allure suivante, dans le cas particulier où H est strictement (ou uniformément) convexe, comme ψ au Thm 2. 7



- Dans le cas $N = 2$, si un système $\dot{x}(t) = F(x(t))$ (12) autonome a une intégrale 1^{ère} ψ , on peut le ramener à un système Hamiltonien associé à un Hamiltonien $H(x) := h(\psi(x))$, où $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à déterminer. C'est le cas e.g. du système de Lotka-Volterra, cf TD, comme en économie sous le nom de modèle cyclique de Goodwin.

- Cas particulier important: Eq. diff. scalaire du 2nd ordre de la forme

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -V'(x) \quad (13)$$

mouvt d'une particule de masse $m = 1$, soumise à une force $f(x) = -V'(x)$: f dérive du potentiel

V . Par exemple, pour le pendule: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$, (14)

(en supposant $m = 1$), on vérifie facilement que

$$\boxed{\psi(\theta, \dot{\theta}) := \psi(\theta, \omega) := \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l} (\cos \theta - 1)} \quad (15)$$

est une intégrale première du système.

Ici, le système du 1^{er} ordre associé:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega & = \frac{\partial \Psi}{\partial \omega}(\theta, \omega) \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta & = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\theta, \omega) \end{cases} \quad (16)$$

est bien Hamiltonien, avec $H(\theta, \omega) = -\Psi(\theta, \omega)$.

Par ailleurs, si on le linéarise près de $\theta = 0$, on obtient le système Hamiltonien linéarisé:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega & = \frac{\partial H_1}{\partial \omega}(\theta, \omega), \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \theta & = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta}(\theta, \omega), \end{cases} \quad \text{avec} \quad (17)$$

$$H_1(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{g}{l} \frac{\theta^2}{2} \approx H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}(\cos \theta - 1). \quad (15')$$


Noter que la matrice du système linéaire (17)

$$\text{est: } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Si e.g. (dans des unités convenables...) $g = 1$, alors A est anti-symétrique, et les trajectoires de (17) sont des cercles centrés en 0 dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta})$. Dans le cas général, on a vu que les valeurs propres de A ont imaginaires conjuguées, et les trajectoires de (17) sont des ellipses centrées en 0.

• Rem. 4:

(i) Dans le cas où $H(X) = H(x, y) \rightarrow +\infty$ quand $\|X\| \rightarrow +\infty$, on voit que les trajectoires de (1') sont des courbes fermées, et que la solution est donc périodique, car le système est autonome. Dans le cas du pendule avec $H(\theta_0, \omega_0) > 2gl =$ valeur critique, les trajectoires ne sont pas périodiques dans le plan (θ, ω) : à chaque tour, $\theta \uparrow$ de 2π :

le pendule repasse au même point, mais avec φ un tour de plus (!) Noter que $H(\omega, \theta) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}(\cos\theta - 1)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $\|(\omega, \theta)\| \rightarrow +\infty$. 
(pas toujours)

(ii) si $H(X) \rightarrow +\infty$ ($\|X\| \rightarrow +\infty$) et si H est convexe,
(obscurement)
e.g. pour un système linéaire hamiltonien comme (17),
alors le système a un seul point d'équilibre $X=0$,
autour duquel toutes les trajectoires tournent
"éternellement" !

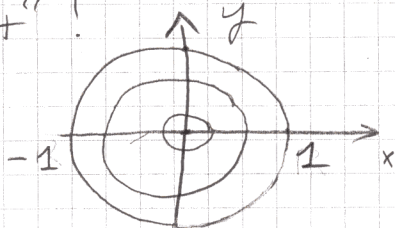


Figure 7:

(iii) Noter la différence avec un système de gradient-flot (11) où au contraire toutes les trajectoires tendent quand $t \rightarrow +\infty$ vers l'unique point d'équilibre x^* (cf Figure 5 si Ψ vérifie les hypothèses du Thm 2. \square)

Exo : Étudier en détail le cas de l'amortisseur de voiture décrit au Ch. 2, qui mélange les deux types de comportement. \square

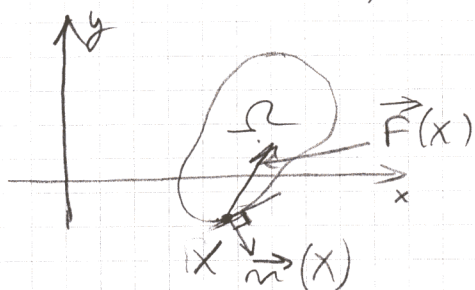
Ex 4. Exos:

A) (i) On considère le système $\dot{X} = AX$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (19)
Montrer qu'il est hamiltonien. Tracer la trajectoire passant par $X_0 := (1, 0) := (x_0, y_0)$

(ii) On pose $\Psi(X) := \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \right)^2$, $a > 0$, et on considère le système: $\dot{X} = AX - a \text{ grad } \Psi(X)$. Étudier ses trajectoires quand $t \rightarrow +\infty$. On dit que le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$ (20) est un cycle-limite stable. Expliquez pourquoi. Montrez que Ψ est une fonction de Lyapunov pour ce système et que

le cycle-limite (20) est en fait asymptotiquement stable. (10)
 B) On considère dans \mathbb{R}^2 un système autonome (1')

On suppose qu'il existe une région Ω fermée bornée de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ , telle que



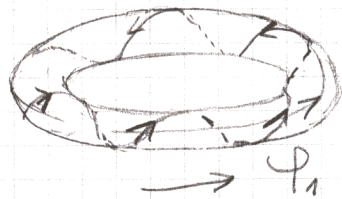
$\forall x \in \Gamma, \vec{F}(x) \cdot \vec{n}(x) < 0$,
 où $\vec{n}(x)$ est le vecteur (unitaire) de la normale à Γ , dirigé vers l'extérieur de Ω .

Est-ce qu'une trajectoire de (1') partant d'un point $(x_0, y_0) \in \Omega :=$ l'intérieur de Ω peut sortir de Ω pour $t \in [0, +\infty[$?

On dit dans ce cas que Ω est une région invariante (pour $t \geq 0$) pour le système (1).

C) On considère dans \mathbb{R}^4 le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1 \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3 \end{cases}$$



(21)

Montrer qu'il est hamiltonien, écrire H sous la forme $H_1(x_1) + H_2(x_2)$, avec $x_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $x_2 := \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

En déduire que toutes les trajectoires vibrent sur le tore (le "pneu") $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$. $\odot \vec{\varphi}_2 \vec{\varphi}_1 \odot \vec{\varphi}_2$

Suivant les relations entre ω_1, ω_2 , et les rayons R_1 et R_2 des cercles $C_1 := \{x_1; x_1^2 + x_2^2 = R_1^2\}$ et $C_2 := \{x_2; x_3^2 + x_4^2 = R_2^2\}$, on obtient soit des trajectoires périodiques, soit des trajectoires partout denses sur le tore.

D) On revient à la situation de B, ¹¹
 à ceci près que sur le bord Γ de Ω' , il
 y a 2 points d'équilibre. En voici un exemple:
 on considère le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -cv - u(1-u) = -cv - u + u^2, \end{cases} \text{ on écrit : } \dot{U} = F(U) \quad (22)$$

où c est donné. On suppose $c \geq 2$.

Les points d'équilibre de (22) vérifient :

$$v = 0 \quad ; \quad -cv - u + u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v = 0, u = 0 \text{ ou } u = 1. \quad (23)$$

• Étudier le système linéarisé $\dot{V} = DF(U)V$ (24)

en $U = A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en $U = B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note

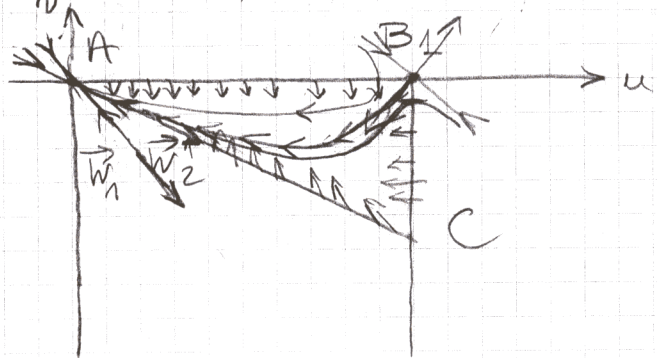
$\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$ les valeurs propres de $DF(U)$
 et $W_i(U)$, $i = 1, 2$ les vecteurs propres associés.

Montrer que A est un noeud attractif et
 B un col. Préciser dans chaque cas l'allure
 des trajectoires et leur sens de parcours au
 voisinage de A ou de B .

• On note $\Delta(A)$ la droite passant par A , colinéaire
 au vecteur $W_2(A)$. Montrer que le produit

scalaire : $(W_2(A))^\perp \cdot F(U)$ est de signe constant

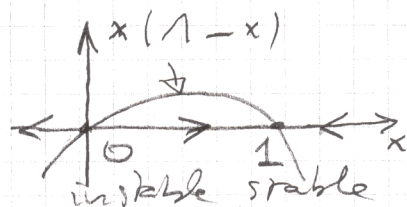
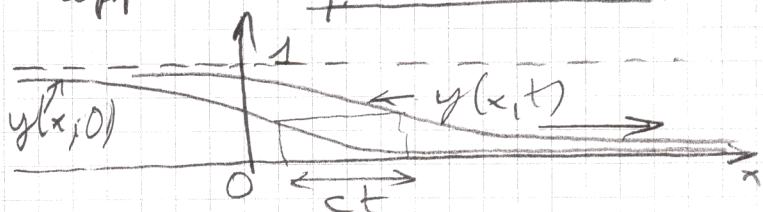
sur $\Delta(A)$, où (e.g.)
 $(W_2(A))^\perp$ a ses deux
 composantes > 0 .



- Montrer que sur chaque côté $\frac{1}{2}$ du triangle ABC, sauf en A et en B, le vecteur $F(U)$ entre dans le triangle ABC
- On admettra que ceci entraîne l'existence d'une trajectoire "issue" du point B, et "arrivant" au point A. Une telle trajectoire est appelée trajectoire hétérocline du système (22). Elle correspond ($\forall c > 2$) à l'existence d'une solution "traveling wave" : $y(x,t) = u(x-ct)$ de l'EDP

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y(1-y), \quad (25)$$

appelée eq. de Fisher.



Pour $t = 0$, $y(x,t) \rightarrow \begin{cases} 1 & (x \rightarrow -\infty) \\ 0 & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$

Quand $t \rightarrow \infty$, en tout point x fixe, la valeur initiale $y(x,0) \in [0,1]$ est remplacée par $y(x,t) \rightarrow 1$ ($t \rightarrow +\infty$).

La diffusion n'a pas modifié la stabilité du point d'équilibre stable $x=1$ pour

l'EDO : $\dot{x} = x(1-x)$. (26)

⚠ c'est souvent le cas, mais pas toujours !!

• Rem. Pour d'autres systèmes 2×2 , \exists une trajectoire homocline:



E) Autre sujet intéressant: Itérations d'un 13
système discret

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

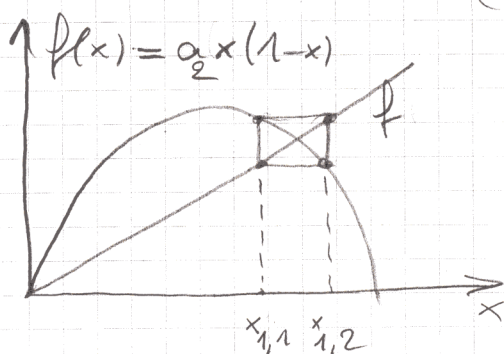
de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , e.g. $N=1, 2, \dots$

Regardez sur le Web les exemples suivants:

• "cascade de Feigenbaum": $N=1$

$$f(x) = ax(1-x), a > 0$$

Pour une suite (a_k) de valeurs de a , on a



d'abord $2^0 = 1$ point fixe

x_1 de f : $f(x_1) = x_1$, puis

pour $a = a_1$, $2^1 = 2$ points

fixes $x_{1,1}, x_{1,2}$ de $f \circ f$,

cf Figure

puis pour $a = a_k$, 2^k points fixes de $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2^k}$,
etc... La suite (a_k) converge

vers une valeur $a^* \in \mathbb{N}$ pour laquelle $f \circ f \circ \dots \circ f$

a une infinité de points fixes entre lesquels "elle ne sait pas lequel choisir": c'est le mécanisme du "passage au chaos par dédoublement de période"...

• consultez ensuite, cf e.g. H.O. Peitgen ...

les exemples classiques de l'ensemble de Julia,
de Mandelbrot etc...

F) Enfin, méthode de séparation des variables pour l'éq. de la chaleur:

14

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour } 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in]0, L[. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (27) \\ (28) \\ (29) \end{array}$$

(i) On cherche $u(x, t) = v(t) w(x)$, solution de l'EDP (27). Montrer que nécessairement, on a :

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = c^{Te} := -\lambda \in \mathbb{R} \quad (30)$$

(ii) On impose maintenant que

$$\left\{ \begin{array}{l} -w''(x) = \lambda w(x) \quad ; \lambda \text{ inconnue} \\ \text{et } w(0) = w(L) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (30') \\ (28') \end{array}$$

On suppose $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda < 0$ ou si $\lambda = 0$, la seule solution de (30')/(28') est $w \equiv 0$. On suppose donc maintenant $\lambda > 0$.

(iii) Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ (les valeurs propres) et une suite de fonctions propres associées $w_k(x) := C \sin k \frac{\pi}{L} x$ (31)

solutions de (30')/(28'). Expliciter λ_k . Montrer que

$$\int_0^L w_k(x) w_j(x) dx = \begin{cases} C & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (32)$$

et choisir C pour que $\int_0^L (w_k(x))^2 dx = 1$ (33).

(iv) Montrer que la fonction $v = v_k(t)$ associée vérifie $v_k(t) = e^{-t \lambda_k} v_k(0)$.

(v) On admettra qu'en ajoutant $y_k(x, t) = v_k(t) w_k(x)$ de $k = 1$ à $+\infty$, on obtient la solution générale de (P)...

FIN