

L3 MASS 2006/07. Systèmes dynamiques. TD1

Exercice 1 Tracer le graphe des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lambda x & f_2(x) &= \lambda x^2 \\ f_3(x) &= \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right) & f_4(x) &= \lambda x |x| \\ f_5(x) &= \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right) & \text{avec } & K, L > 0, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Déterminer les ensembles $f_i^{-1}(\{0\})$, et analyser les propriétés de régularité de Lipschitz de ces fonctions.

Exercice 2 (Explosion en temps fini) On considère l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 \quad (1)$$

1. Montrer que pour toute solution $t \mapsto x(t)$ non identiquement nulle, nous avons

$$(1) \iff d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt$$

En déduire que la courbe intégrale de (1), passant par $x(0) > 0$ au temps $t = 0$, est donnée pour tout $t < 1/x(0)$, par la formule

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

2. Décrire et tracer les graphes des solutions de (1), passant respectivement par un point $x(0) > 0$, et par un point $x(0) < 0$.
3. Déterminer la solution de (1) passant par un point donné $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ au temps t_0 . Comparer les résultats obtenus avec l'analyse qualitative de ce modèle étudiée dans l'exercice 6 ci-dessous.
4. Analyser les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dx}{dt}(t) &= x^2(t) - 4 \\ 2) \quad \frac{dx}{dt}(t) &= -\frac{1}{2x(t)} \quad \text{avec } x(t_0) \neq 0, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

Exercice 3 (Dynamique de populations) On considère un modèle d'évolution de population simplifié où les variations de tailles sont proportionnelles à la population existante. Autrement dit, si $x(t)$ désigne le nombre d'individus au temps t , nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) \quad \text{avec } \lambda \neq 0 \quad (2)$$

Vérifier que la solution du système différentiel est donnée par la formule exponentielle

$$x(t) = e^{\lambda t} x(0)$$

Discuter le comportement en temps long de ces solutions en fonction du signe du paramètre λ . Ces modèles exponentiels sont aussi utilisés en sciences économiques, ainsi qu'en mathématiques financières, pour décrire les évolutions de ressources technologiques, ou encore les variations de taux d'intérêts, et l'évolution de valeurs d'actions financières.

Afin d'intégrer certains freins à la croissance infinie de ces systèmes, tels les limitations environnementales pour des modèles de populations, les limitations de ressources naturelles, ou encore les barrières financières, on utilise souvent le modèle logistique suivant, aussi appelé modèle de Verhulst-Pearl.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad (3)$$

Le paramètre K représente la capacité, et la taille limite du système. On notera que si $x(t)$ est proche de 0, comparé à la valeur K , l'équation (3) est similaire à l'équation (2).

1. Vérifier que les solutions constantes de (3) sont données par

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

2. En utilisant la décomposition des fractions

$$\frac{1}{x(1 - ax)} = \frac{1}{x} + \frac{a}{(1 - ax)}$$

valable pour tout $x \notin \{0, 1/a\}$, montrer que la solution de (3), passant par l'état $x(0) \notin \{0, K\}$, au temps $t = 0$, est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)] e^{-\lambda t}}$$

3. Étudier, en fonction des signes de λ et $x(0)$, le comportement en temps long de cette solution. On examinera les limites des courbes intégrales lorsque $t \uparrow \infty$, puis lorsque $t \downarrow -\infty$.

Exercice 4 (Prédictions) Les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à sa température relative; c'est à dire à l'écart entre sa propre température, et celle de l'environnement. Plus formellement, si $x(t)$ désigne la température de ce corps au temps t , nous avons

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda (x(t) - T) \quad (4)$$

où $T > 0$ désigne la température de l'environnement, et $\lambda > 0$ une constante de refroidissement.

1. Montrer que la solution de (4) associée à une condition initiale $x(0)$ est donnée par la formule

$$x(t) = T + (x(0) - T) e^{-\lambda t}$$

2. Vérifier la formule

$$\lambda (t_1 - t_2) = -\log \left(\frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T} \right)$$

3. Application : Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hôtel, et sa température est de 24°C . La température ambiante est supposée constante, et égale à 20°C . Deux heures plus tard, la température du corps est descendue à 21°C . Trouver l'instant où la personne est décédée, en supposant que sa température était de 37°C jusqu'à ce moment.
4. Application en économie : le **multiplicateur dynamique**
Soit $Y(t)$ le revenu à l'instant t , $C(t)$ la consommation, $0 < c < 1$ la propension marginale à consommer, $\lambda > 0$ un coefficient d'ajustement et $A > 0$ une constante. On suppose que

$$\dot{Y}(t) := \frac{dY}{dt}(t) = \lambda (C(t) - Y(t)),$$

avec

$$C(t) = cY(t) + A.$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $Y(t)$. Etudier les états d'équilibre et tracer le graphe des solutions en fonction du temps. Quelle est la limite de $Y(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 5 (Désintégration) La plupart des matériaux radioactifs se désintègrent à une vitesse proportionnelle à leur masse courante. Plus formellement, si $x(t)$ désigne la quantité du produit au temps t , nous avons

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda x(t) \tag{5}$$

Le paramètre $\lambda > 0$ représente une constante de désintégration, et $x(0)$ la quantité initiale du produit radioactif en question.

- Déterminer la demi-vie T d'un produit radioactif donnée en fonction du paramètre de désintégration. Autrement dit, le paramètre T correspond au temps mis par un produit pour se désintégrer de moitié.
- Le Carbone 14 est un produit radioactif couramment utilisé en archéologie pour dater divers objets. Sa demi-vie est de $T_c = 5568 \pm 30$ années. Calculer la constante de désintégration du Carbone 14.
- Un produit radioactif a une demi-vie de 15 jours. Quelle quantité initiale de produit doit-t-on avoir pour qu'il nous reste 30g après 30 jours ?

Exercice 6 (Analyse qualitative) Cet exercice souligne le lien entre l'étude élémentaire des fonctions numériques faites au lycée (et dans l'exercice 1), et l'analyse qualitative de systèmes différentiels.

On se donne un ouvert U de \mathbb{R}^2 , et une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy associé au couple (U, f) , et déterminé par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad (t, x) \in U \quad (6)$$

Résoudre ce problème revient à trouver une fonction différentiable $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et telle que

$$\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in U \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

1. Déterminer l'équation de la droite Δ_M , tangente à la courbe

$$t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point $M = (t_0, x_0) \in U$.

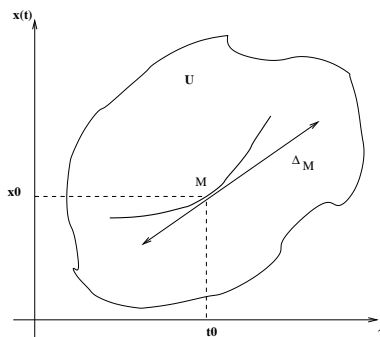


FIG. 1 –

L'application $M \in \mathbb{R}^2 \mapsto \Delta_M$ est appelée le champ des tangentes associé à l'équation (6)

2. Déterminer graphiquement les champs des tangentes correspondant aux équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_i(x(t)) \quad i \in \{1, \dots, 5\}$$

pour les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq 5}$ étudiées dans l'exercice 1.

Dans chaque situation :

- On explicitera les ensembles des points M où la droite à une pente respectivement nulle, positive, et négative.
 - On tracera quelques courbes intégrales $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, associées à ces champs de tangentes.
3. On considère l'équation différentielle (6) associée à la fonction f décrite par le graphe suivant :

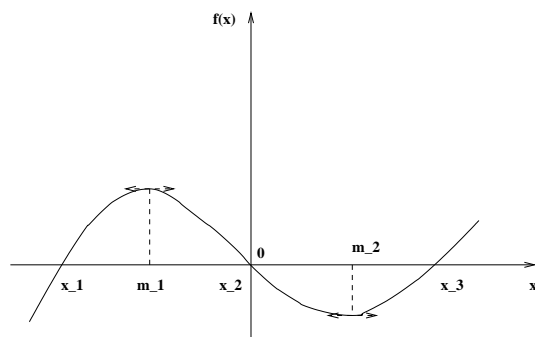


FIG. 2 -

Décrire le champ des tangentes associé, et déterminer les limites lorsque $t \uparrow \infty$ des solutions de (6), dans les cas suivants

- | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------|
| 1) $x(0) = x_1$ | 2) $x_1 < x(0) < x_2$ | 5) $x(0) = x_3$ |
| 3) $x(0) = x_2$ | 4) $x_2 < x(0) < x_3$ | |