

## TD 1. L3 MASS Systèmes Dynamiques [Corrigé]

**Exercice 1** Tracer le graphe des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lambda x & f_2(x) &= \lambda x^2 \\ f_3(x) &= \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right) & f_4(x) &= \lambda x|x| \\ f_5(x) &= \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right) & \text{avec} & \quad K, L > 0, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Déterminer les ensembles  $f_i^{-1}(\{0\})$ , et analyser les propriétés de régularité de Lipschitz de ces fonctions.

**Solution :**

1. On a clairement  $f_1^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ . D'autre part, la dérivée de  $f_1$  est donnée par  $f_1'(x) = \lambda$ . Par conséquent, la fonction  $f_1$  est globalement Lipschitz de paramètre  $|\lambda|$ . Plus précisément, on a dans cette situation linéaire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f_1(x) - f_1(y)| = |\lambda| |x - y|$$

Le graphe de cette fonction est décrit ci-dessous, suivant le signe de  $\lambda$ .

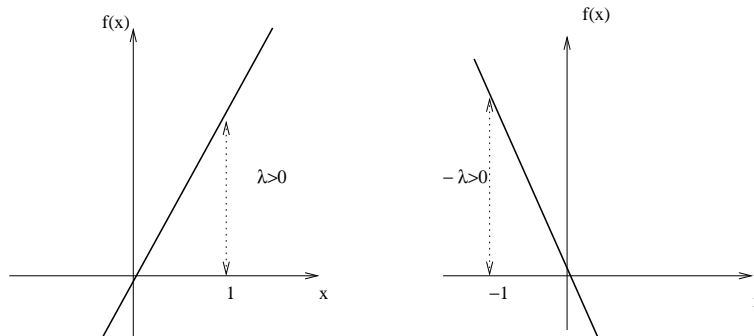


FIG. 1 –

2. On a clairement  $f_2^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ . D'autre part, la dérivée de  $f_2$  est donnée par  $f_2'(x) = 2\lambda x$ . Elle est donc continue, et donc bornée sur tout domaine borné  $D \subset \mathbb{R}$ . on dit que la fonction  $f_2$  est localement Lipschitzienne, i.e. Lipschitzienne sur tout domaine borné  $D$  de  $\mathbb{R}$ . (On rappelle qu'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  est bornée, lorsque qu'il existe un couple de nombres  $a \leq b$  tels que

$D \subset [a, b]$ ). Précisons la constante de Lipschitz dans ce cas particulier. Le même type de raisonnement serait valable dans le cas général, mais nous éviterons de le refaire ... Dans cette situation quadratique, nous avons

$$\forall (x, y) \in D^2 (\subset [a, b]^2) \quad |f_2(x) - f_2(y)| \leq k |x - y|$$

avec

$$k = 2 |\lambda| (|a| \vee |b|)$$

( $\vee$  dsigne le sup). Pour vérifier cette assertion, on utilise le fait que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_2(x) - f_2(y) = \lambda (x - y) (x + y)$$

et

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad 2a \leq (x + y) \leq 2b \quad (\Rightarrow |x + y| \leq 2(|a| \vee |b|))$$

Le graphe de cette fonction est décrit ci-dessous, suivant le signe de  $\lambda$ .

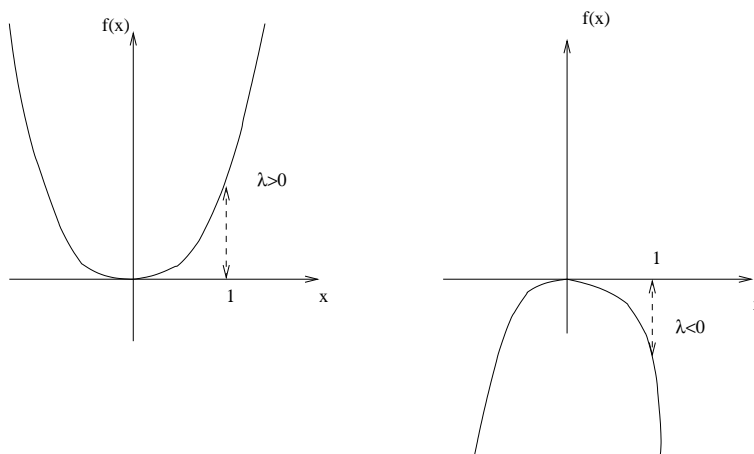


FIG. 2 -

3. On a clairement  $f_3^{-1}(\{0\}) = \{0, K\}$ . D'autre part, la dérivée de  $f_3$  est donnée par

$$f_3'(x) = \lambda \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \lambda \frac{x}{K} = \lambda \left(1 - \frac{2x}{K}\right),$$

elle est donc continue et  $f_3$  est donc localement Lipschitzienne. Le graphe de cette fonction est décrit ci-dessous, suivant le signe de  $\lambda$ .

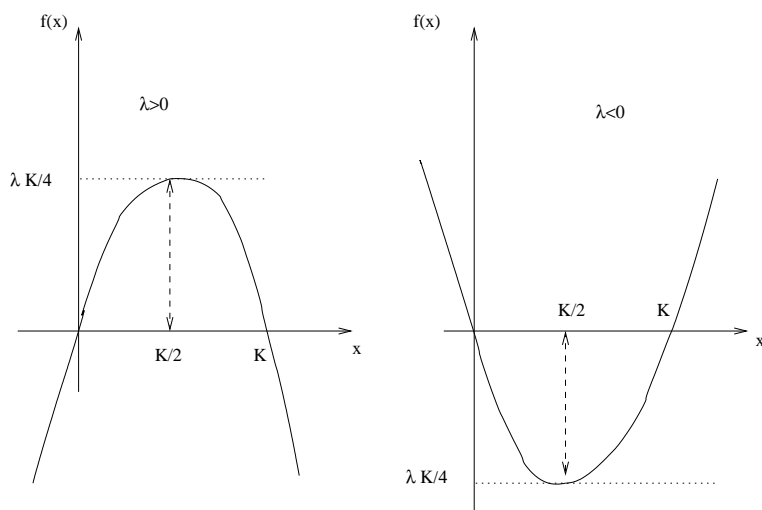


FIG. 3 –

4. On a clairement  $f_4^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ . D'autre part,  $f_4$  est localement Lipschitzienne. Le graphe de cette fonction est décrit ci-dessous, pour  $\lambda < 0$ , ainsi que l'allure qualitative des trajectoires, voir exercice suivants.

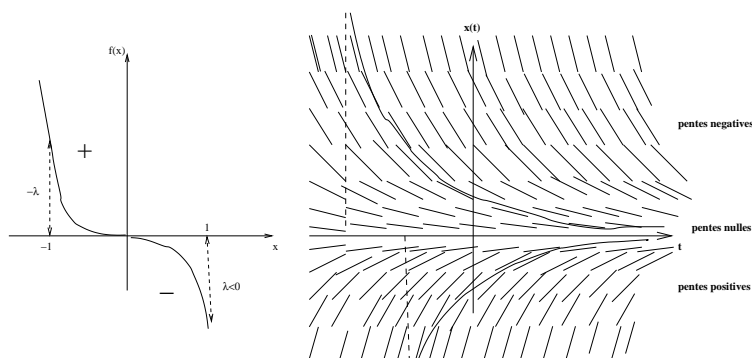


FIG. 4 –

5. On a clairement  $f_5^{-1}(\{0\}) = \{0, K, L\}$ , et  $f_5$  est encore localement Lipschitzienne. pour  $\lambda > 0$ , suivant la place de  $K$  par rapport  $L$ , on obtient :

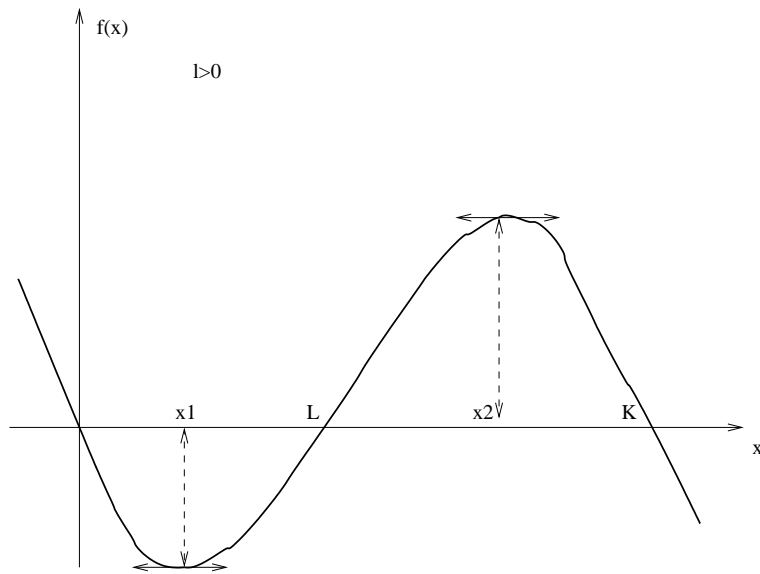


FIG. 5 -

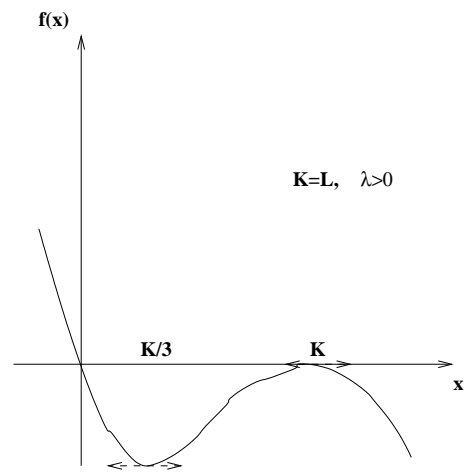


FIG. 6 -

L'étude du cas où  $\lambda < 0$ , se déduit des précédentes, par une simple symétrie

**Exercice 2 (Explosion en temps fini)** On considère l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t)^2 \quad (1)$$

1. Montrer que pour toute solution  $t \mapsto x(t)$  non identiquement nulle, nous avons

$$(1) \iff d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt$$

En déduire que la courbe intégrale de (1), passant par  $x(0) > 0$  au temps  $t = 0$ , est donnée pour tout  $t < 1/x(0)$ , par la formule

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t}$$

2. Décrire et tracer les graphes des solutions de (1), passant respectivement par un point  $x(0) > 0$ , et par un point  $x(0) < 0$ .
3. Déterminer la solution de (1) passant par un point donné  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$  au temps  $t_0$ . Comparer les résultats obtenus avec l'analyse qualitative de ce modèle étudiée dans l'exercice 6 ci-dessous.
4. Analyser les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{dx}{dt}(t) &= x^2(t) - 4 \\ 2) \quad \frac{dx}{dt}(t) &= -\frac{1}{2x(t)} \quad \text{avec } x(t_0) \neq 0, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

4

**Solution :**

1. Nous avons vu dans l'exercice 1 que la fonction  $f(x) = x^2$  est continue, localement Lipschitz, et l'on a  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ . Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction  $t \mapsto x(t)$  s'annule pour une valeur de  $t$ , elle est nécessairement identiquement nulle. Par conséquent, une solution non identiquement nulle, ne s'annule pour aucune valeur de  $t$ .

Pour toute solution non identiquement nulle, nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x(t)}\right) &= -\frac{1}{x(t)^2} \times \frac{dx}{dt}(t) = -1 \\ &\iff d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -dt \end{aligned}$$

Par conséquent, la courbe intégrale de (1), passant par  $x(0) > 0$  au temps  $t = 0$ , est donnée pour tout  $t < 1/x(0)$ , par la formule

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(0)} = -t + 0 &\iff \frac{1}{x(t)} = -t + \frac{1}{x(0)} = \frac{1 - x(0)t}{x(0)} \\ &\iff x(t) = \frac{x(0)}{1 - x(0)t} \end{aligned}$$

2. Les graphes des solutions de (1), passant respectivement par un point  $x(0) > 0$ , et par un point  $x(0) < 0$ , sont décrits dans la figure suivante :

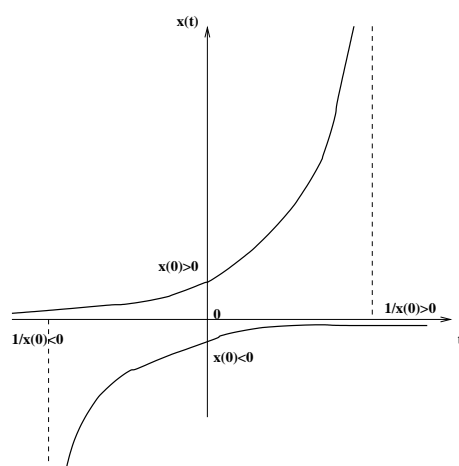


FIG. 7 -

3. D'après la première question, nous avons pour tout  $x(t_0) = x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = (t - t_0) &\iff -\frac{x(t_0)}{x(t)} = \frac{x(t_0)(t - t_0) - 1}{x(t_0)} \\ &\iff x(t) = \frac{x(t_0)}{1 - x(t_0)(t - t_0)} \end{aligned}$$

Le dénominateur s'annule pour la valeur  $t = t_0 + \frac{1}{x(t_0)}$ . La solution cherchée est donc définie soit sur  $(-\infty, t_0 + \frac{1}{x(t_0)})$ , lorsque  $x(t_0) > 0$ ; soit sur  $(t_0 + \frac{1}{x(t_0)}, +\infty)$ , lorsque  $x(t_0) < 0$ .

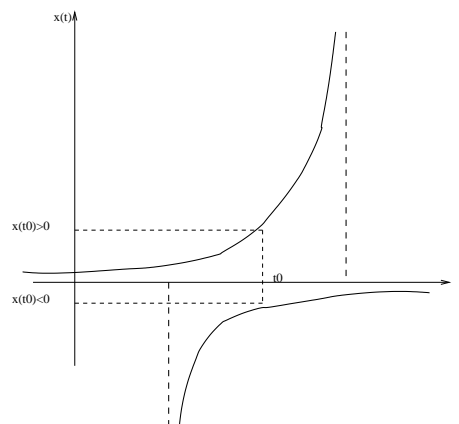


FIG. 8 -

La fonction  $f(x) = x^2 - 4$  est continue, localement Lipschitz, et l'on a  $f^{-1}(\{0\}) = \{-2, 2\}$ . Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à cette équation différentielle. D'après ce théorème, si une fonction  $t \mapsto x(t)$  prend une valeur  $c \in \{-2, 2\}$  pour une valeur de  $t$ , elle est nécessairement identiquement égale à  $c$ . Par conséquent, une solution non identiquement égale à  $c$ , ne prend la valeur  $c$ , pour aucune valeur de  $t$ . Pour décrire plus précisément ces solutions, on utilise la décomposition des fractions

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 4} &= \frac{1}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{1/4}{x - 2} - \frac{1/4}{x + 2} \end{aligned}$$

valable pour tous les  $x \notin \{-2, 2\}$ . Nous avons donc, pour toute solution non identiquement égale à 2, ou à -2

$$4 \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{dx}{x - 2} - \frac{dx}{x + 2} = d(4t)$$

Par conséquent, on obtient

$$d \log \left( \frac{x - 2}{x + 2} \right) = d(4t)$$

Par une simple intégration on arrive à la formule suivante

$$\log \left( \frac{x(t) - 2}{x(t) + 2} \right) - \log \left( \frac{x(t_0) - 2}{x(t_0) + 2} \right) = 4(t - t_0)$$

En prenant l'exponentielle des deux membres, ceci entraîne que

$$(x(t) - 2)(x(t_0) + 2) = (x(t_0) - 2)(x(t) + 2) \times e^{4(t-t_0)}$$

n en conclut que

$$\begin{aligned} x(t) [(x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}] \\ = 2 [(x(t_0) + 2) + (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}] \end{aligned}$$

La solution cherchée est donc donnée par

$$x(t) = 2 \times \frac{(x(t_0) + 2) + (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}$$

On remarque que le dénominateur s'annule au point  $t_f$  déterminé par l'équation suivante

$$\frac{x(t_0) + 2}{x(t_0) - 2} = e^{4(t_f - t_0)} \Leftrightarrow t_f = t_0 + \frac{1}{4} \log \left( \frac{x(t_0) + 2}{x(t_0) - 2} \right)$$

On notera aussi que

$$\lim_{x_0 \rightarrow 2^+} \left( t_0 + \frac{1}{4} \log \left( \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \right) \right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x_0 \rightarrow -2^-} \left( t_0 + \frac{1}{4} \log \left( \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \right) \right) = -\infty$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} x(t_0) < -2 &\implies t_f = t_0 + \frac{1}{4} \log \left( \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \right) < t_0 \\ x(t_0) > 2 &\implies t_f = t_0 + \frac{1}{4} \log \left( \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \right) > t_0 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $x(t_0) \in (-2, 2)$ , les quantités  $(x(t_0) + 2)$  et  $(x(t_0) - 2)$  sont de signes contraires, et on a

$$\begin{aligned} x(t_0) \in (-2, 2) &\implies 0 < x(t_0) + 2 < 4 \quad \text{et} \quad -4 < x(t_0) - 2 < 0 \\ &\implies \frac{x(t_0) + 2}{x(t_0) - 2} < 0 \\ &\implies (x(t_0) + 2) \left( 1 - \frac{x(t_0) - 2}{x(t_0) + 2} e^{4(t-t_0)} \right) > 0 \end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} x(t_0) = -2 &\implies (x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)} = 4e^{4(t-t_0)} \\ x(t_0) = 2 &\implies (x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)} = 4 \end{aligned}$$



Par conséquent, si  $x(t_0) \in [-2, 2]$ , les solutions sont définies sur tout  $\mathbb{R}$  avec pour chaque  $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{cases} 2 \times \frac{(x(t_0)+2)+(x(t_0)-2) e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0)+2)-(x(t_0)-2) e^{4(t-t_0)}} & \text{si } |x(t_0)| \neq 2 \\ -2 & \text{si } x(t_0) = -2 \\ 2 & \text{si } x(t_0) = 2 \end{cases}$$

Lorsque  $x(t_0) < -2$ , les solutions ne sont définies que sur l'intervalle  $(t_f, +\infty)$

$$t \in (t_f, +\infty) \mapsto 2 \times \frac{(x(t_0) + 2) + (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}$$

Enfin si  $x(t_0) > 2$ , les solutions ne sont définies que sur l'intervalle  $(-\infty, t_f)$

$$t \in (-\infty, t_f) \mapsto 2 \times \frac{(x(t_0) + 2) + (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}{(x(t_0) + 2) - (x(t_0) - 2) e^{4(t-t_0)}}$$

4. D'un point de vue qualitatif les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) = -\frac{1}{2x(t)}$$

sont décrites dans le diagramme suivant

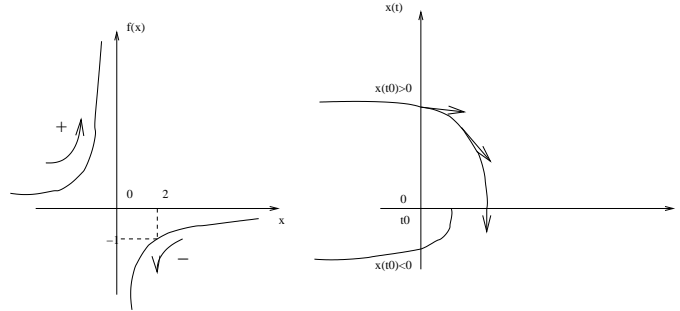


FIG. 9 –

Pour décrire plus précisément ces solutions, on note que pour toute condition initiale  $x(t_0) \neq 0$  nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\frac{1}{2x(t)} \iff \frac{d}{dt}x^2(t) = -1$$

Par conséquent, on obtient

$$x^2(t) = x^2(t_0) - (t - t_0) \geq 0 \iff t < t_f = x^2(t_0) + t_0$$

On en conclut que les solutions de l'équation sont définies pour tous les temps  $t \in [-\infty, t_f]$ , avec

$$t \in [-\infty, t_f] \quad \mapsto \quad x(t) = \begin{cases} \sqrt{x^2(t_0) - (t - t_0)} & \text{si } x(t_0) > 0 \\ -\sqrt{x^2(t_0) - (t - t_0)} & \text{si } x(t_0) < 0 \end{cases}$$

■

**Exercice 3 (Dynamiques de population)** On considère un modèle d'évolution de population simplifié où les variations de la population totale  $x$  sont proportionnelles à  $x$ . Autrement dit, si  $x(t)$  désigne le nombre d'individus au temps  $t$ , nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \quad (3)$$

Vérifier que la solution du système différentiel est donnée par la formule exponentielle

$$x(t) = e^{\lambda t} x(0)$$

Discuter le comportement en temps long de ces solutions en fonction du signe du paramètre  $\lambda$ . Ces modèles exponentiels sont aussi utilisés en sciences économiques, ainsi qu'en mathématiques financières, pour décrire les évolutions de ressources technologiques, ou encore les variations de taux d'intérêts, et l'évolution de valeurs d'actions financières.

Afin d'intégrer certains freins à la croissance infinie de ces systèmes, tels les limitations environnementales pour des modèles de populations, les limitations de ressources naturelles, ou encore les barrières financières, on utilise souvent le modèle logistique suivant, aussi appelé modèle de Verhulst-Pearl.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad (4)$$

Le paramètre  $K$  représente la capacité, et la taille limite du système. On notera que si  $x(t)$  est proche de 0, comparé à la valeur  $K$ , l'équation (4) est similaire à l'équation (3).

1. Vérifier que les solutions constantes de (4) sont données par

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

2. En utilisant la décomposition des fractions

$$\frac{1}{x(1 - a x)} = \frac{1}{x} + \frac{a}{(1 - a x)}$$

valable pour tout  $x \notin \{0, 1/a\}$ , montrer que la solution de (4), passant par l'état  $x(0) \notin \{0, K\}$ , au temps  $t = 0$ , est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)] e^{-\lambda t}}$$

3. Étudier, en fonction des signes de  $\lambda$  et  $x(0)$ , le comportement en temps long de cette solution. On examinera les limites des courbes intégrales lorsque  $t \uparrow \infty$ , puis lorsque  $t \downarrow -\infty$ .

**Solution :**

La première question est immédiate. En effet, nous avons

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} x(0)) = \lambda \times e^{\lambda t} x(0) = \lambda x(t)$$

1. Les solutions constantes de (4) sont clairement données par

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = K$$

Plus précisément, les solutions constantes  $x(t) = c$  doivent satisfaire l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) = 0 \iff x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad x(t) = K$$

2. En utilisant la décomposition des fractions

$$\frac{1}{x(1-x/K)} = \frac{1}{x} + \frac{1/K}{(1-x/K)}$$

valable pour tout  $x \notin \{0, K\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} (4) \iff & \frac{dx}{x(1-x/K)} = \lambda dt \\ \iff & \frac{dx}{x} + \frac{1}{K} \frac{dx}{(1-x/K)} = d(\lambda t) \\ \iff & d(\log x) - d \log(1-x/K) = d \log \left( \frac{x}{1-x/K} \right) = d(\lambda t) \\ \iff & -\log \left( \frac{x(t)}{1-x(t)/K} \right) + \log \left( \frac{x(0)}{1-x(0)/K} \right) = \lambda t \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} (4) \iff & \log \left( \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{K} \right) = -\lambda t + \log \left( \frac{1}{x(0)} - \frac{1}{K} \right) \\ \iff & \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{K} + e^{-\lambda t} \left( \frac{1}{x(0)} - \frac{1}{K} \right) \end{aligned}$$

On en conclut que la solution de (4), passant par l'état  $x(0) \notin \{0, K\}$ , au temps  $t = 0$ , est donnée par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{Kx(0)}{x(0) + [K - x(0)] e^{-\lambda t}}$$

3. Le comportement asymptotique des courbes intégrales de l'équation logistique, sont résumés dans les figures suivantes. Les diagrammes de gauche représentent les graphes des fonctions

$$f(x) = \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

en fonction du signe du paramètre  $\lambda$ . Dans la situation où  $\lambda > 0$ , on notera que le point 0 est un état d'équilibre instable, alors que le point  $K$  est un état d'équilibre stable, en ce sens où

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \in [0, K) \quad x(0) = \epsilon & \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K \\ \forall \epsilon \in (-\infty, 0) \quad x(0) = \epsilon & \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty \end{aligned}$$

et

$$\forall \epsilon \geq -K \quad x(0) = K + \epsilon \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$$

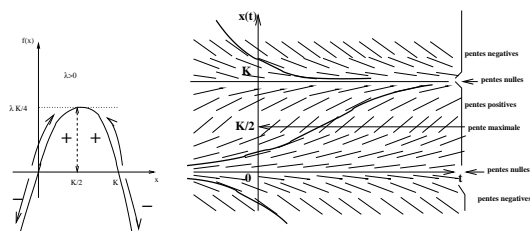


FIG. 10 –

La situation où  $\lambda < 0$ , est décrite schématiquement dans le diagramme suivant.

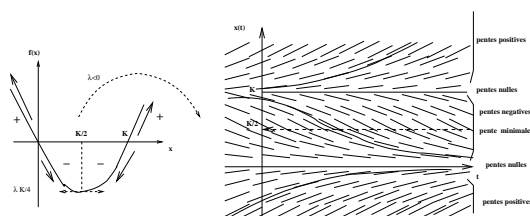


FIG. 11 –

■

**Exercice 4 (Prédictions)** Les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à sa température relative; c'est à dire à l'écart entre sa propre température, et celle de l'environnement. Plus formellement, si  $x(t)$  désigne la température de ce corps au temps  $t$ , nous avons

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda (x(t) - T) \quad (5)$$

où  $T > 0$  désigne la température de l'environnement, et  $\lambda > 0$  une constante de refroidissement.

1. Montrer que la solution de (5) associée à une condition initiale  $x(0)$  est donnée par la formule

$$x(t) = T + (x(0) - T) e^{-\lambda t}$$

2. Vérifier la formule

$$\lambda (t_1 - t_2) = -\log \left( \frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T} \right)$$

3. Application : Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hôtel, et sa température est de  $24^\circ\text{C}$ . La température ambiante est supposée constante, et égale à  $20^\circ\text{C}$ . Deux heures plus tard, la température du corps est descendue à  $21^\circ\text{C}$ . Trouver l'instant où la personne est décédée, en supposant que sa température était de  $37^\circ\text{C}$  jusqu'à ce moment.

4. Application en économie : **le multiplicateur dynamique**

Soit  $Y(t)$  le revenu à l'instant  $t$ ,  $C(t)$  la consommation,  $0 < c < 1$  la propension marginale à consommer,  $\lambda > 0$  un coefficient d'ajustement et  $A > 0$  une constante. On suppose que

$$\dot{Y}(t) := \frac{dY}{dt}(t) = \lambda (C(t) - Y(t)),$$

avec

$$C(t) = cY(t) + A.$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $Y(t)$ . Etudier les états d'équilibre et tracer le graphe des solutions en fonction du temps. Quelle est la limite de  $Y(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ?

**Solution :**

1. Si on pose  $y(t) = [x(t) - T]$ , alors on a

$$(5) \iff \frac{dy}{dt}(t) = -\lambda y(t)$$

Dans l'exercice 3, nous avons vu que la solution de ce système est donnée par

$$y(t) = e^{-\lambda t} y(0)$$

On en conclut que

$$[x(t) - T] = e^{-\lambda t} [x(0) - T] \iff x(t) = T + e^{-\lambda t} [x(0) - T]$$

2. D'après la question précédente, nous avons

$$\frac{[x(t_1) - T]}{[x(t_2) - T]} = \frac{e^{-\lambda t_1} [x(0) - T]}{e^{-\lambda t_2} [x(0) - T]} = e^{-\lambda(t_1 - t_2)} \Rightarrow \lambda (t_1 - t_2) = -\log \frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T}$$

3. D'après les données du problème nous avons  $T = 20$ , et

$$\begin{aligned} t_1 = 2h \quad \text{et} \quad t_2 = 0h &\implies x(t_1) = 21^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad x(t_2) = 24^\circ\text{C} \\ &\implies \lambda = -\frac{1}{t_1 - t_2} \log \frac{x(t_1) - T}{x(t_2) - T} = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{4} \\ &\implies \lambda = \log 2 \end{aligned}$$

A l'instant  $t_d$  du décès, la température du corps est supposée être égale à  $37^\circ\text{C}$ . Comme précédemment, on obtient la formule

$$\lambda(t_d - t_2) = -\log \frac{x(t_d) - T}{x(t_2) - T}$$

↓

$$t_d = -\frac{1}{\log 2} \log \frac{37-20}{24-20} = \frac{\log 2 - \log 17}{\log 2} \leq \frac{\log 2 - \log 16}{\log 2} = -3h$$

4. En éliminant  $Y$  entre les deux équations, on a

$$\dot{Y}(t) = \lambda ((c - 1) Y(t) + A).$$

Le seul état d'équilibre correspond à  $\dot{Y} = 0$  et donc  $Y_e = \frac{A}{1-c}$ . Il est unique et positif car  $0 < c < 1$ . Les solutions sont toutes (cf Cours) de la forme  $Y(t) = Y_e + (Y(0) - Y_e)e^{-(1-c)t}$ . Chacune de ces solutions tend vers  $Y_e$  en temps grand, en (dé)croissant si la valeur initiale  $Y(0) = Y_0$  est ( $> Y_e$ ) ( $< Y_e$ ). Les graphes sont donc les mêmes que dans les questions précédentes. ■

**Exercice 5 (Désintégration)** La plupart des matériaux radioactif se désintègrent à une vitesse proportionnelle à leur masse courante. Plus formellement, si  $x(t)$  désigne la quantité du produit au temps  $t$ , nous avons

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\lambda x(t) \quad (6)$$

Le paramètre  $\lambda > 0$  représente une constante de désintégration, et  $x(0)$  la quantité initiale du produit radioactif en question.

1. Déterminer la demi-vie  $T$  d'un produit radioactif donnée en fonction du paramètre de désintégration. Autrement dit, le paramètre  $T$  correspond au temps mis par un produit pour se désintégrer de moitié.
2. Le Carbone 14 est un produit radioactif couramment utilisé en archéologie pour dater divers objets. Sa demi-vie est de  $T_c = 5568 \pm 30$  années. Calculer la constante de désintégration du Carbone 14.
3. Un produit radioactif a une demi-vie de 15 jours. Quelle quantité initiale de produit doit-t-on avoir pour qu'il nous reste 30g après 30 jours ?

**Solution :**

1. La demi-vie  $T$  d'un produit radioactif est déterminée par la formule

$$x(T) = e^{-\lambda T} x(0) = \frac{x(0)}{2} \iff T = \frac{1}{\lambda} \log 2$$

2. La constante de désintégration du Carbone 14 est approximativement donnée par

$$\lambda_c = \frac{1}{T_c} \log 2 = \frac{1}{5568 \times 365} \log 2 \simeq 1.244 \times 10^{-4}$$

3. La constante de désintégration d'un produit de demi-vie  $T = 16j$  est donnée par

$$\lambda = \frac{1}{T} \log 2 = \frac{1}{15} \log 2$$

La quantité initiale de produit nécessaire pour avoir 30g après 30 jours, est clairement donnée par

$$x(30) = e^{-\lambda_c \times 30} x(0) = 30 \iff x(0) = 30 \times e^{30 \times \frac{\log 2}{15}} = 4 \times 30 = 120g$$

■

**Exercice 6 (Analyse qualitative)** Cet exercice souligne le lien entre l'étude élémentaire des fonctions numériques faites au lycée (et dans l'exercice 1), et l'analyse qualitative de systèmes différentiels.



On se donne un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , et une fonction continue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On considère le problème de Cauchy associé au couple  $(U, f)$ , et déterminé par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad (t, x) \in U \quad (7)$$

Résoudre ce problème revient à trouver une fonction différentiable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ , définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , et telle que

$$\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in U \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

1. Déterminer l'équation de la droite  $\Delta_M$ , tangente à la courbe

$$t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point  $M = (t_0, x_0) \in U$ .

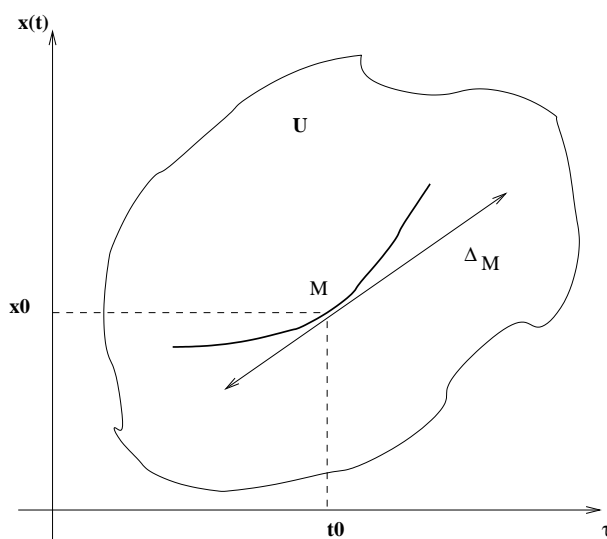


FIG. 12 –

L'application  $M \in \mathbb{R}^2 \mapsto \Delta_M$  est appelée le champ des tangentes associé à l'équation (7)

2. Déterminer graphiquement les champs des tangentes correspondant aux équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_i(x(t)) \quad i \in \{1, \dots, 5\}$$

pour les fonctions  $(f_i)_{1 \leq i \leq 5}$  étudiées dans l'exercice 1.

Dans chaque situation :

- On explicitera les ensembles des points  $M$  où la droite à une pente respectivement nulle, positive, et négative.
  - On tracera quelques courbes intégrales  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ , associées à ces champs de tangentes.
3. On considère l'équation différentielle (7) associée à la fonction  $f$  décrite par le graphe suivant :

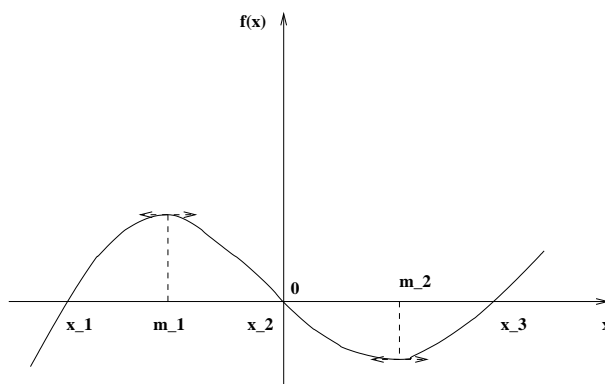


FIG. 13 –

Décrire le champ des tangentes associé, et déterminer les limites lorsque  $t \uparrow \infty$  des solutions de (7), dans les cas suivants

- |                 |                       |                 |
|-----------------|-----------------------|-----------------|
| 1) $x(0) = x_1$ | 2) $x_1 < x(0) < x_2$ | 5) $x(0) = x_3$ |
| 3) $x(0) = x_2$ | 4) $x_2 < x(0) < x_3$ |                 |

**Solution :**

1. La droite  $\Delta_M$ , tangente à la courbe

$$t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$$

en un point  $M = (t_0, x_0) \in U$ , a pour équation

$$(x - x_0) = f(x_0) (t - t_0)$$

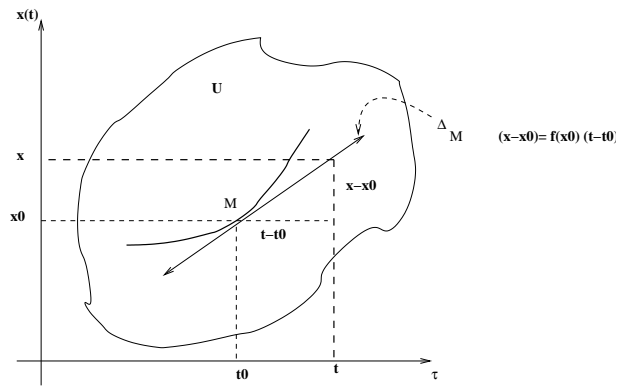


FIG. 14 -

2. (a) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_1(x(t)) = \lambda x(t)$$

avec  $\lambda > 0$ , est décrit dans la figure suivante :

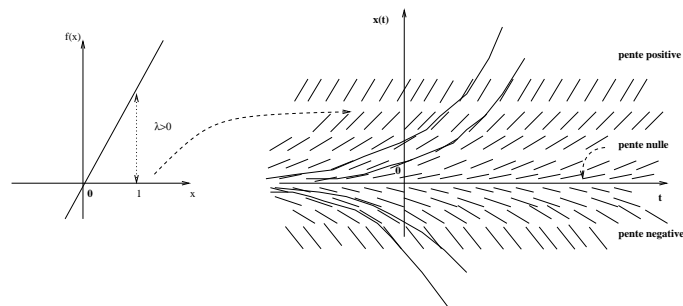


FIG. 15 -

Lorsque  $\lambda < 0$ , le champ des tangentes est donné par

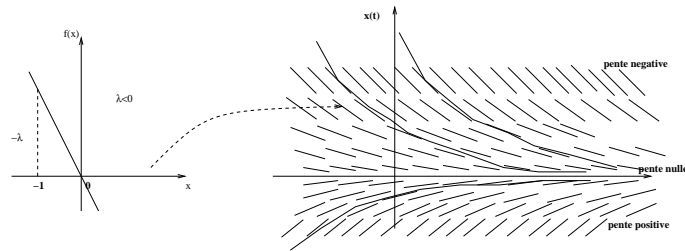


FIG. 16 –

(b) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_2(x(t)) = \lambda x(t)^2$$

avec  $\lambda > 0$ , est décrit dans la figure suivante :

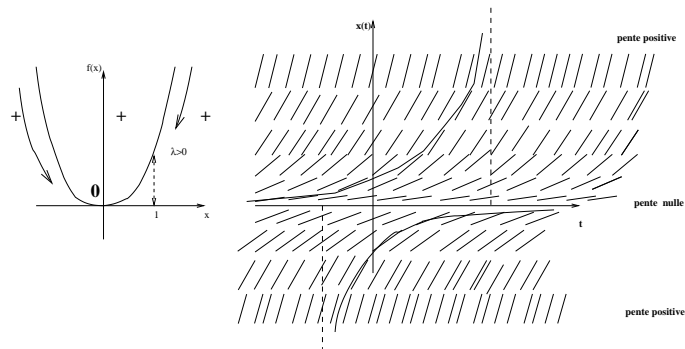


FIG. 17 –

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque  $\lambda < 0$

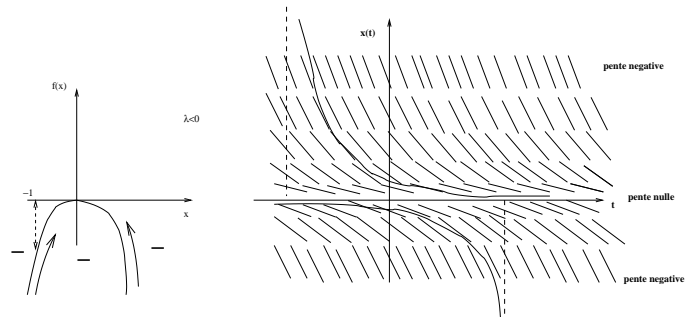


FIG. 18 –

(c) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_3(x(t)) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

avec  $\lambda > 0$ , est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

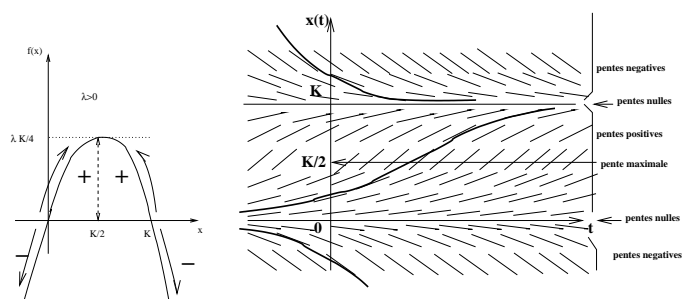


FIG. 19 –

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque  $\lambda < 0$

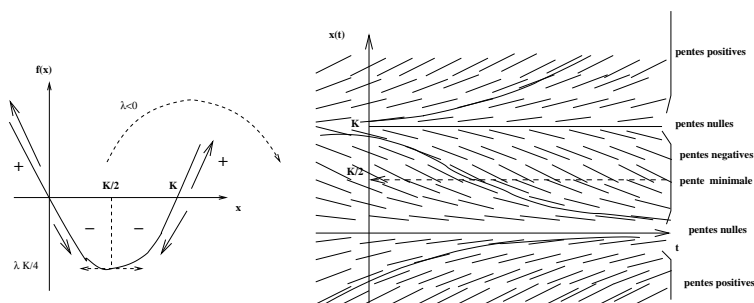


FIG. 20 –

(d) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_4(x(t)) = \lambda x(t) |x(t)|$$

avec  $\lambda > 0$ , est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

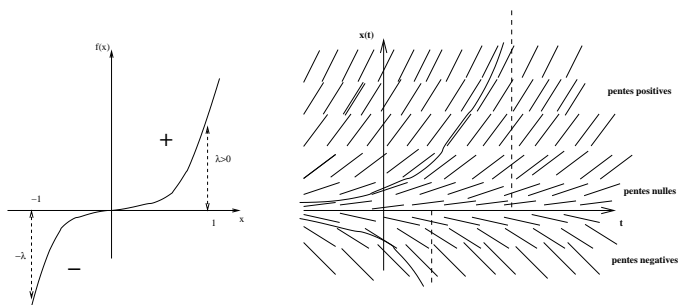


FIG. 21 -

La figure suivante représente le champ des tangentes lorsque  $\lambda < 0$

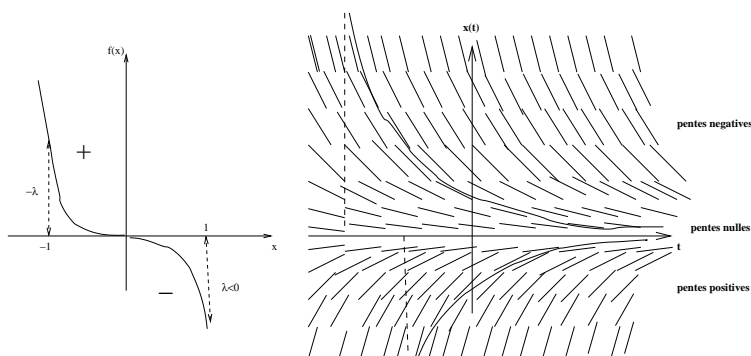


FIG. 22 -

(e) Le champ des tangentes correspondant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f_5(x(t)) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \left(\frac{x(t)}{L} - 1\right)$$

avec  $\lambda > 0$ , et  $K > L$  est décrit graphiquement dans la figure ci-dessous :

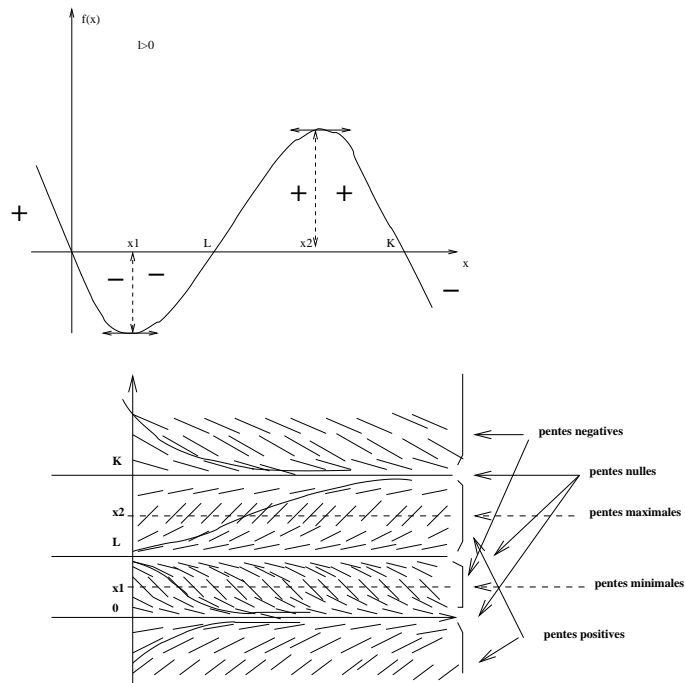


FIG. 23 -

Le diagramme correspondant au cas  $\lambda < 0$  se déduit du précédent, par une simple symétrie. La situation où  $\lambda > 0$ , et  $K = L$ , est décrite ci-dessous.

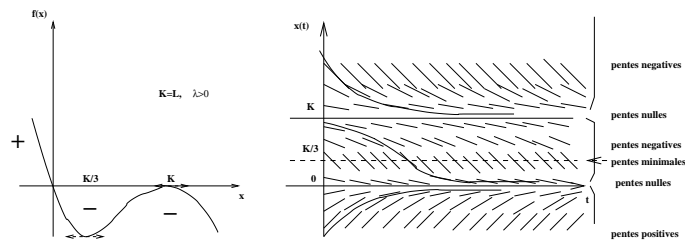


FIG. 24 -

3. Le diagramme suivant résume le comportement en temps long des courbes intégrales du systèmes en fonction de leurs initialisations.

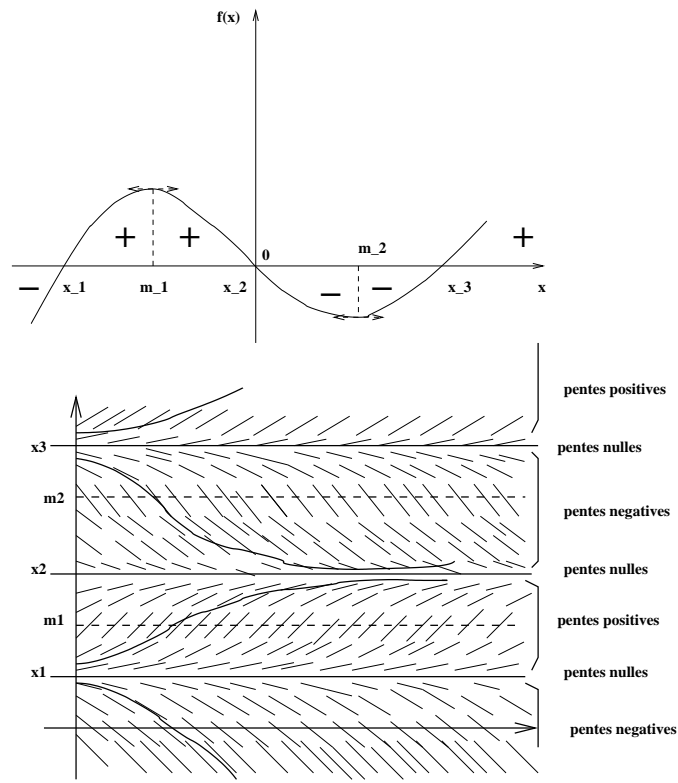


FIG. 25 -

